Anfangsgründe der Mathematik

Karls Hadaly von Hada,

Professors der Mathematik, der bürgerlichen Bau- und der Wasserbaukunst, Bücherrevisors und Zensors in der k. k. Preßburger Akademie.

Zweiter Band.

Die Meßkunst.

Preßburg,
gedrukt bei Simon Peter Weber.
1790.

Seiner

königlichen

Hoheit

dem

Durchlauchtigsten

Erzherzog

Franz

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Durchlauchtigster Erzherzog!

Nicht ehe beginte das angenehme Gerücht der Verfügung Eurer königlichen Hoheit von Mailand nach Wien, als in den Hungarischen Herzen, die von jeher dem Durchlauch-

 tig-

tigsten Stamme des Erzhauses Oester=
reichs mit aller ersinlichen Ergebenheit auf
das feurigste zugethan sind, die ehrfurchtsvol=
le Liebe, die Pflichtbegierde, und die entzü=
kende Freude, aus welchen sich die vollkommen=
ste Hochachtung bildet, allgemein rege wurde,
den erhabnesten Enkel einer grossen Königin
unersterblichen Gedächtnisses, den ruhmwürdig=
sten Sohn eines allgepriesenen klugsten Lan=

des=

desvaters in der Nähe und an der Seite un- sers allgeliebten allermildreichsten mit rastlos- vorsichtig- weisester Thätigkeit für das Wohl der weit ausgedehnten Staaten ohne Beispiel väterlich wachenden Monarchen zuwissen, und zuverehren.

Solch einstimmige Freude meiner Vater- landsgenossen lenkte meinen Eifer desto mehr,

und keinen Wunsch hegte meine Brust heftiger, als Höchst Denenselben meine Unterwürfigkeit füglich bezeugen zukönnen. Dies zubethätigen schien mir gegenwärtige Gelegenheit die schiksamste zusein.

Nun welche Wonne! welch eine Wonne bemächtigte sich meiner Seele! da Eure Königliche Hoheit mir gnädigst zugestatten geruhe-

ruheten dieses meiner Werke Ihro ruhmwürdigstem Namen weihen zudürfen.

Die huldreichste Billigung meines unterthänigsten Gesuches ist für mich eben so schäzbar und günstig, als merkwürdig und ehrenvoll, und zwar um soviel mehr, als Eure Königliche Hoheit, wie weltbekant, ein besonderer Gönner, Kenner und Schätzer der Mathema-

tik sind; aber auch ist zu gleicher Zeit Höchst Derenselben schuzreichste Aeusserung über die Wissenschaften überhaupt für die Staaten, die sich glüklich schätzen von Höchst Denenselben dereinst beherrschet zuwerden, eben so wichtig als preiswürdig.

Geruhen nun Eure Königliche Hoheit die eifrigste Zueignung dieses Buches, welche

aus

aus blosser Lauterkeit des reinsten Triebes der wahren Hochachtung herrühret, in huldreichsten Schuz zunehmen, und — — Ach könte mein heisser Wunsch in eben solcher Völle, als ich ihn fühle, dargestellet werden! — — Der Himmel kröne, und erhalte Höchst Dieselben mit erspießlichster Vollkommenheit im erwünschten Genuß des besten Wohlseins bis in die spätesten Jahre des menschlichen Zieles.

Dies

Dies gelobet mit unterscheidenster Verehrung in tiefster Erniedrigung

Eurer Königlichen Hoheit

allerunterthänigst = gehorsamster

Hadaly.

Vorbericht.

Sintemal die Dreiekmeßkunst einen nicht minder schönen als sonders wichtigen Theil der Mathematik bestellet, habe ich sie etwas ausgedehnter, und auch durch ausführliche Auflösungen einiger Aufgaben abgehandlet. Hiezu werden einige Tabellen erheischet. Nicht jeder ist entweder vermögend, oder geneigt auf derlei Tabellen, welche theils kostspielig, theils öfters nicht allzeit, und allerort zuhaben sind, sonderheitlich Auslagen zumachen.

machen. Dannenhero wird eine so vortheilhafte Wissenschaft meistens nur obenhin erlernet. Um solchem Mangel abzuhelfen, habe ich sowohl dem ersten Band eine Verhältnißzahlentabelle der natürlichen Zahlen, als auch diesem zweiten eine Stellvertretungslinientabelle der Winkel von 1 bis 90 Grade nebst den zehenden Minuten, woraus gemäß gegebner Leitung auch die übrigen bestimmet werden, beigeschaltet.

Inhalt.

I. Abschnit.

Von Eigenschaften verschiedener Stellungen, und Beziehungen der Linien.

I. Kapitel. Von vorläufigen Gründen der Meßkunst.

II. Kapitel. Von Eigenschaften der geraden Linien in Ansehung ihrer gegenmässigen Stellungen.

III. Kapitel. Von Eigenschaften der Linien in Beziehung auf den Zirkelkreis.

IV. Kapitel. Vom Maß der Winkel, die von solchen geraden Linien, welche sich bloß auf den Zirkelkreis beziehen, gebildet werden.

V. Kapitel. Von Eigenschaften der Zirkellinien gegeneinander.

VI. Kapitel. Von Kentnissen der Vieleke insgemein, und von Eigenschaften der Dreieke insbesondere.

VII. Kapitel. Von Eigenschaften der Viereke.

VIII. Kapitel. Von Eigenschaften der übrigen Vieleke überhaupt.

IX. Kapitel. Von Verhältnißgleichungen der Linien.

II. Abschnit.

Von Flächen.

I. Kapitel. Von dem Inhalt und einigen Verwandlungen der Flächen.

II. Ka-

II. Kapjtel. Von Vergleichungen der Flächen.

III. Abschnit.

Von Körpern.

I. Kapitel. Von Kentnissen, und Inhalt manigfaltiger Körper.
II. Kapitel. Von Vergleichungen der Körper.

IV. Abschnit.

Die Dreiekmeßkunst.

I. Kapitel. Von den Gründen der Dreiekmeßkunst.
II. Kapitel. Von der Auflösung der Dreieke.

Bemerkte Fehler.

Seite.	Zeile.	anstatt	sei
16.	25.	A E = ED. r	A E = ED.
—	26.	gleiche	gleicher
23.	14.	A C	A B
26.	10.	jedemz	jedem
—	11.	ubeschreiben.	zubeschreiben.
33.	1.	B M	B N
59.	1.	A E — A.C.	A E = AC.

I. Ab=

1. Abschnit.

Von Eigenschaften, verschiedenen Stellungen, und Beziehungen der Linien.

1. Kapitel.

Von vorläufigen Gründen der Meßkunst.

1. Erklärung.

Die Meßkunst (Geometria aus γεα Erde, und μετρεω ich messe, Erd- oder Feldmeßkunst) ist eine Wissenschaft die ausgedehnte Grösse (Algebra §. 4) auszumessen.

2. Heisch. Obwohlen sich in der Wirklichkeit keine Grösse befindet, die nicht zugleich in die Länge, Breite und Höhe, oder Tiefe ausgedehnt ist, so läßt sich doch nur eine einzige Ausdehnung ohne denen übrigen zween, oder

auch nur zwei ohne der dritten zur Betrachtung ziehen.

3. Erklär. Eine einzige Ausdehnung (entweder in die Länge, oder in die Breite, oder in die Höhe) ohne denen übrigen zween betrachtet, heißt **Linie** (linea): zwei Ausdehnungen zusammen ohne der dritten darstellen eine **Fläche** (superficies): alle drei Ausdehnungen vereinigt bestellen einen **Körper** (corpus, solidum).

4. Erklär. Der **Punkt** (punctum) wird bei den Mathematikern als so etwas angesehen, das allerdings keine Theile enthält. *

5. Erklär. Die Entstehung einer Linie läßt sich füglich durch die Bewegung des Punktes einbilden, massen er während seiner Bewegung ohnunterbrochen Spuren nach sich zurückläßt. Behält nun der bewegte Punkt stäts seine erste Richtung, so entstehet eine **gerade Linie** (linea recta), weichet er aber irgend nur einen einzigen Augenblick von seiner ersten Richtung ab, so entstehet eine **krumme Linie** (linea curva); westwegen man sagen kan, eine gerade Linie ist jene, in welcher alle Punkte eine und eben dieselbe Richtung haben: eine krumme aber, in welcher nicht alle Punkte eben dieselbe Richtung sondern verschiedene besitzen. Linien, welche aus geraden und krummen bestehen, heissen **vermengte** (mixtæ), und werden unter die krummen gerechnet.

6. Folg.

* Euclid Def. tert.

6. Folger Von einem Punkt A (Fig. 1) zu dem andern B kan demnach nur eine einzige gerade Linie AB gezogen werden; weil, wieviele immer zuziehen wären, alle vermöge gleicher Richtung überein fallen würden. Krumme Linien können aber vermöge manigfaltiger Richtung der Punkte in unendlicher Menge zwischen zween Punkte gezogen werden, als ACB, ADB, u. s. w.

7. Folger. Zwei nach ihrer Lage gegebene Punkte bestimmen die Lage und Richtung der geraden Linie.

8. Folg. Es ist diesemnach ohnmöglich, daß sich zwei gerade Linien in mehreren als einem gemeinschaftlichen Punkt schneiden, oder berühren, ohne eine einzige gerade Linie auszumachen.

9. Folger. Die gerade Linie ist die kürzeste aller jenen krummen, welche zwischen zween Punkten gezogen können werden. Denn jede krumme, weil sie von ihrer ersten Richtung ablenket, erstreket sich durch weiteren Raum von einem zu dem anderen Punkt (Fig. 1.).

10. Folger. Die gerade Linie ist also die schicklichste um die gegenmässige Entfernung zwoer Punkte zuuntersuchen.

11. Folger. Der geraden Linie giebt es nur eine einzige Gattung: der krummen aber unzehlige.

Anmerk. Eine unbekante gerade Linie wird durch eine andere bekante gerade (als Klafter, Schuh, Zoll, Strich ꝛc.) abgemessen, massen man untersucht, wie oft diese in derselben enthalten sei. Im Längenmaß ist o das Zeichen der Klafter: I des Schuhes: II des Zolles: III des Striches: IIII des Punktes. So 3° 2' 4'' heißt 3 Klafter, 2 Schuh, 4 Zoll, u. s. w.

12. Erklär. Die Entstehung einer Fläche (§. 3) läßt sich füglich durch die Bewegung einer Linie, welche sich anders als nach ihrer Richtung bewege (sonst würde nur eine Verlängerung der Linie, nicht aber eine Fläche erfolgen), vorbilden, massen die Linie während ihrer Bewegung ohnunterbrochen Spuren nach sich zurückläßt. Behält nun die bewegte Linie ihre erste Richtung, so entstehet eine **gerade** oder **ebene Fläche** (superficies plana, v. planum): im widrigen Fall eine **krumme Fläche** (superficies curvilinea).

13. Erklär. Wenn man sich eine (anders als nach ihrer Richtung) in Bewegung gesetzte Fläche vorstellet, die ohnunterbrochen Spuren ihrer zurückläßt, entstehet ein **Meßkünstlerischer Körper** (§. 3).

14. Folger. Gleichwie also der Punkt der Anfang und das Ende, oder die Grenzen von einer Linie ist, eben so ist die Linie von der Fläche, und die Fläche von dem Körper der Anfang und das Ende oder die Grenzen.

15. Er-

15. Erklär. Ein Kreis, Zirkel, oder Zirkelkreis (circulus) ist bei den Mathematikern eigentlich ein von einer krummen in sich kehrenden Linie, in welcher ein jeder Punkt von einem mitteren Punkt, **Mittelpunkt** (centrum) genant, gleich entfernet ist, begrenzter Raum oder ebene Fläche. Die Entstehung davon wird dem Verstand begreiflich gemacht, wenn sich eine gerade Linie a m (Fig. 2.) um ihren Endpunkt m, massen dieser vest und unbewegt verbleibet, auf einer ebenen Fläche herumdreht, bis sie nach Rücklassung ihrer Spuren (§. 12.) wieder in ihre erste Lage gelanget. In solchem Kreis unterscheidet man durch besondere Benennungen manche Linien und Theile: Die Grenzlinie a b c g d h a heißt **Umkreis, Zirkelumkreis, Kreisumfang,** oder **Zirkellinie** (circumferentia, peripheria περιφερεια): jeder Theil davon, wie ab, bc, cg, **Bogen, Kreisbogen** (arcus): jede aus dem Mittelpunkt m bis zur Kreislinie gezogene gerade Linie, wie ma, mb, **Halbmesser,** (radius, semidiameter): jede aus einem bis zum andern Punkt des Umkreises gezogene gerade Linie, wie bc, dg, **Sehne** (chorda): jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt reichet, sonderheitlich **Durchmesser** (diameter διαμετρος): der ganze Raum des Kreises die **Kreisfläche, Zirkelfläche** (superficies, vel area circuli): jeder Theil davon, welcher von einer Sehne, und ihrem Bogen begrenzet ist, wie dcgd, **Abschnit** (segmentum): so wie jeder Theil, der von zween Halbmessern, und von dem entzwischenden Bogen einge-

geschränket ist, als amba, hmah, Ausschnit des Zirkelkreises (sector) benamset wird.

16. Folger. Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich.

17. Folger. Der doppelte Halbmesser gleichet dem Durchmesser.

18. Folger. Der Durchmesser theilet den Kreis in zwei gleiche Theile. Denn, wenn sich der eine Theil hcgdh um den Durchmesser hc auf den anderen Theil hinüber schwänge; würden sie einander vollkommentlich deken.

Anmerk. Daß man den Zirkelkreis durch den Werkzeug, sogenanten Zirkel (circinus), wovon derselbe seine gleichnamige Benennung erhält, beschreibe, ist mehr als genugsam bewust.

19. Erklär.. Die Helfte des Kreises heißt Halbkreis, Halbzirkelkreis (semicirculus).

20. Willkühr. Der Umkreis des Zirkels, er seie groß oder klein, wird in 360 gleiche Theile, oder Grade (gradus): jeder Grad in 60 Minuten (minuta prima): jede Minute in 60 Sekunden oder zweite Minuten (minuta secunda) u. s. w. (vermöge gemächlichster Rechnung *) eingetheilt.

An=

---

*) Plin. Hist. N. L. 17. C. XXIII.

Anmerk. Das Zeichen der Grade ist dieses o oder 0, der Minuten dies 1, der Sekunden dies 11 (u. s. w.), massen sie den Zahlen rechts obenher beigefüget werden: 24°, 12^{1}, 5^{11}, heißt 24 Grade, 12 erste Minuten, 5 zweite Minuten oder Sekunden.

21. Folger. Der halbe Umkreis enthält demnach 180: und der vierte Theil 90 Grade.

22. Erklär. Ein Winkel (angulus) ist (Fig. 3.) die gegenmässige Neigung zwoer in einem Punkt zusammenstossenden Linien AB, und CB. Solche Linien heissen die Schenkel (crura): der Zusammenstossungspunkt die Spitze, oder der Scheitel (vertex) des Winkels. Sind die Schenkel gerade Linien, so bestellen sie einen geradlinigen Winkel (angulus rectilineus); sind sie krumme Linien: einen krumlinigen (curvilineus). (Wir werden in diesem Bande nur von den geradlinigen Winkeln sprechen).

23. Folger. Die Grösse des Winkels hanget demnach nicht von der Grösse der Schenkel (wie sie immer verlängert, oder verkürzert mögen werden), sondern nur von der Grösse ihrer gegenmässigen Neigung oder Oefnung ab.

Anmerk. Ein Winkel wird entweder nur mit einem einzigen oder mit drei Buchstaben angedeutet. Befindet sich ein Winkel nur allein an einem Punkt, so ist es gleichgiltig ihn nur mit einem Buchstaben oder mit dreien anzuzeigen,

doch muß aus den dreien Buchstaben derjenige, welcher an dem Scheitel des Winkels lieget, in der Mitte ausgesprochen werden, als (Fig. 3) der Winkel B, oder AB C. Befinden sich aber mehrere Winkel an einem Punkt, so ist es (um eine Verwirrung zuvermeiden) nothwendig jeden mit drei Buchstaben insbesondere auszudrücken, oder, wenn es der Kürze halber nur mit einem geschehen soll, muß solcher Buchstabe in dem Scheitel des Winkels eingezeichnet werden, als (Fig. 13.) der Winkel ADC, oder m. Den Winkel von aussen umher betrachtet heißt man Ek.

24. Lehrs. Jeder Bogen, der aus dem Scheitel eines Winkels zwischen dessen Schenkeln von verschiedenen Halbmessern beschrieben wird, wächst, oder nimt ab eben so, als solcher Winkel durch die gegenmässige Entfernung oder Näherung der Schenkel wächst oder abnimt.

Beweis. Man stelle sich in Am (Fig. 4.) zwei aufeinander ruhende gerade Linien vor, derer die eine sich von der anderen um ihren vesten Endpunkt m (wenn auch ringsherum) hinweg bewege, damit sie mit der anderen in verschiedenen Lagen mB, mD (u. s. w.) manigfaltige Winkel bilde: wenn nun der Winkel AmD zweimal so groß ist, als AmB, so ist auch der Bogen AD zweimal so groß, als AB, und umgekehrt; welches einleuchtend wird, wenn sich der Ausschnit AmB um den Halbmesser mB auf den Ausschnit BmD hinüber wendet; denn, gleichwie solchergestalt der Winkel AmB in AmD

zwei=

zweimal, eben so ist auch der Bogen AB in AD zweimal enthalten. Gleiches bestehet mit co, cx, ct, u. s. w.

25. Folger. Das Maß eines Winkels ist demnach der Bogen, welcher aus dem Scheitel des Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben wird; weßwegen ein Winkel eben so viele Grade enthält, als solcher Bogen aus seinem ganzen Umkreis (§. 20.) bezieht.

26. Folger. Alle Winkel, welche sich auf einer ebenen Fläche an einem Punkt ringsherum befinden, betragen sämtlich 360 Grade. Denn sie messet der ganze aus ihren gemeinschaftlichem Scheitel beschriebene Umkreis.

27. Erklär. Jener Winkel, welcher 90 Grade zum Maß hat, heißt **rechter Winkel** (angulus rectus): derjenige aber, welcher entweder mehrere oder wenigere Grade enthält, überhaupt ein **schiefer** (obliquus): sonderheitlich ein **spitziger** oder **scharfer** (acutus), wenn ihm wenigere als 90 Grade zukommen: ein **stumpfer** (obtusus), wenn er mehrere als 90 zehlet.

28. Folger. Alle Winkel, die sich auf einer ebenen Fläche um einen Punkt befinden, betragen gesamt vier rechte. Denn $4 \times 90^{\circ} = 360^{\circ}$ (§. 26.)

29. Folger. Auf einer geraden Linie an einem Punkt können nur zwei rechte Winkel be-

 stehen,

stehen. Denn auf einer geraden Linie gleichsam auf einem Durchmesser kan ein Halbzirkelumkreis beschrieben werden, der das Maß von zween rechten Winkeln enthält (§. 21, 27)

30. Erklär. Die Meßkünstlerischen Grössen werden dem Verstand durch Linien vorgestellet; derlei Vorstellung kan füglich Linienbildniß oder sonst Figur (Figura) genennet werden.

31. Grundsätze. Nebst den Grundsätzen (Alg. §. 10.), die wir schon hie und da gebraucht, und angeführt haben, sind noch folgende zum fernern Behuf dienlich:

I. Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie auch einander gleich.

II. Gleiche Grössen können anstat gleichen angesetzet werden.

III. Wenn zwei Grössen einer dritten ähnlich sind, sind sie auch einander ähnlich.

IV. Wenn zwei Grössen einander gleich sind, sind auch die gesamten Theile der einen den gesamten Theilen der anderen gleich.

V. Wenn zu gleichen Grössen gleiche hinzugegeben, oder davon hinweggenommen werden, beharren sie einander gleich.

VI. Wenn gleiche Grössen mit gleichen gevielfältiget, oder getheilet werden, sind auch die Erzeugnisse, oder Theilanzeiger gleich.

VII.

VII. Wenn zwoer Grössen die eine grösser ist, als die andere, ist auch die Helfte der einen grösser, als die Helfte der anderen, und umgekehrt. Ueberhaupt

VIII. Ungleiche Grössen verbleiben ungleich, wenn sie mit gleichen vermehret, verminderet, gevielfältiget, oder getheilet werden.

IX. Grössen, welche gehörig aufeinander gelegt, in allen ihren Ausdehnungen gänzlich übereinkommen, und sich gegenmässig vollkommen deken, sind einander gleich.

32. Heischesätze. Der gewöhnlichsten Heischesätze (Alg. §. 11) sind folgende:

I. Von einem Punkt zu dem andern kan (wenigstens im Gedanken) eine gerade Linie gezogen werden.

II. Aus einem Punkt zu einer Linie kan eine Linie unter verschiedener Neigung und Stellung gezogen werden.

III. Eine begrenzte Linie kan beiderseits beliebig verlängert werden.

IV. Eine gegebne Linie kan in zwei gleiche Stüke zertheilet werden.

V. Aus einem Punkt kan ein Zirkelkreis beschrieben werden. u. s. w.

II.

II. Kapitel.

Von den Eigenschaften der geraden Linien in Ansehung ihrer gegenmässigen Stellungen.

33. Erklär. Senkrechte Linie (linea perpendicularis) AB (Fig. 5.) heißt jene gerade, welche auf einer andern geraden CD dergestalt aufsteht, daß sie sich weder auf die eine noch auf die andere Seite mehr neige: im widrigen Fall ist sie eine schräge oder schiefe Linie (obliqua) wie EC (Fig. 6.)

34. Folger. Die senkrechte Linie bestellet demnach mit derjenigen, wozu sie senkrecht ist, beidseits gleiche, folgsam rechte Winkel (§. 29).

35. Folger. Wenn also eine gerade Linie mit einer anderen einen rechten Winkel bestellet, ist dieselbe zu dieser, eben so wie gegenmässig diese zu derselbigen senkrecht.

36. Folger. Wenn die senkrechte AB (Fig. 5) auf die Gegenseite der anderen Linie CD verlängert wird, ist auch der verlängerte Theil BE senkrecht. Denn, weil auf der geraden AE nur zwei rechte Winkel bestehen können (§. 29), ABD aber ein rechter ist (§. 34), ist auch DBE ein rechter Winkel.

37. Fol-

37. Folger. Aus einem Punkt einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche kan nur eine einzige senkrechte Linie errichtet werden. Denn, man nehme an, es könte aus C (Fig. 6), nebst der senkrechten CD eine zweite senkrechte z. B. CE aufgerichtet werden, so würden beide Winkel ECB, und DCB rechte und derowegen einander gleich sein; folglich gleichete ein Theil nemlich ECB seinem Ganzen nemlich dem DCB, was unmöglich ist (Alg. §. 48. N. 2).

38. Folger. Gleichergestalt kan auf eine gerade Linie aus einem ausser derselben gegebenen Punkt nur eine einzige senkrechte Linie gefället werden. Gesetzt, es könte aus A (Fig. 7) nebst AB noch eine andere z. B. AC senkrecht herabgelassen werden, so müsten ACD und ABD rechte Winkel, und folglich einander gleich sein (§. 34), was ohnmöglich ist. Denn, wenn man sich vorstellet, daß der Winkel ACD unverändert auf der geraden ED in die Lage FBD vorrüke, so ist einleuchtend, daß FBD als ein Theil in ABD enthalten sei (Alg. §. 48. N. 2).

Anmerk. Die senkrechte, sonst auch **lothrechte**, oder **bleirechte Linie** erhält eigentlich ihre Benennung und Richtung von einem Senkel, Loth, oder Blei, Bleifaden, (Faden, woran ein Stükblei, oder anderes Gewicht gefüget ist), den man gegen die Oberfläche eines ruhenden Wassers (gegen die wahre Oberfläche der Erde) aus einem Höhepunkt frei und unbewegt herabhangen läßt. Eben jene Linie, welche man sich auf sol-

cher

cher Oberfläche vorstellet, heißt man **wasserrechte** oder **wagrechte** Linie in Rücksicht der vorigen. Wir begnügen uns hier mit dieser Erinnerung, und lassen es bei unserer §. 33. angeführten Erklärung bewenden, bis zur Gelegenheit in der angewandten Meßkunst das ausführliche hievon zuentnehmen.

39. Lehrs. Wenn eine Linie AB (Fig. 8) zu einer andern CD senkrecht ist, und welch immer einer ihrer Punkte von zween beidseitigen Punkten C und D der anderen Linie gleichweit absteht, so stehen auch alle ihre übrigen Punkte von eben denselben zween Punkten gleichweit ab.

Beweis. Es stehe 1) der gemeinschaftliche Punkt B von C und D gleichweit ab, nemlich es sei BC = BD, so wird auch jeder anderer z. B. A oder E von beiden C und D gleichweit abstehen, folglich AC = AD, oder EC = ED. Denn, wenn man sich vorstellet, daß sich der Winkel ABD unverändert um AB auf seinen gleichen ABC (§. 34) hinüberwende, so endiget sich D in C (vermöge BC = BD), und macht mit C nur einen Punkt aus, folglich ist auch AC = AD, oder EC = ED (§. 6).

Es sei 2) welch immer ein anderer Punkt z. B. A oder E von C und D gleich entfernet, nemlich es sei AC = AD, oder EC = ED, so ist auch B von C und D gleich entfernet, oder BC = BD. Denn, wenn BC = BD, so ist auch AC = AD, oder EC = ED (wie es erst be-

wiesen

wiesen worden), also gegenmässig, wenn AC = AD, oder EC = ED, so ist nothwendigerweis auch BC = BD.

40. Lehrs. Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 8) auf einer andern CD solchermassen aufsteht, daß ihrer zwei Punkte A und E von zween beidseitigen Punkten C und D gleich entfernet seien, so ist dieselbe zu dieser senkrecht.

Beweis. Zwei Punkte bestimmen die Lage einer geraden Linie (§. 7), wenn also zwei Punkte A und E der einen Linie von zween Punkten C und D der anderen gleichweit abstehen, so stehen auch alle ihre übrigen Punkte von eben solchen zween gleich ab, folglich steht die eine Linie dermassen auf der anderen, daß sie sich weder auf die eine noch auf die andere Seite mehr neige; nun §. 33, also.

41. Aufg. Aus einem in einer geraden Linie AB (Fig. 9) gegebenen Punkt C eine senkrechte aufzustellen.

Auflös. Man setze den einen Schenkel des Zirkels im gegebenen Punkt C an, mittelst des anderen aber bezeichne man mit beliebig gleicher Oefnung beidseits einen Punkt D und E, alsdan aus eben diesen zweien bezeichneten Punkten beschreibe man mit einem Halbmesser, der grösser sei als DC, in F zwei sich durchschneidende Bögen, von dem Durchschnitspunkt F ziehe man zu dem gegebenen Punkt eine gerade Linie, so ist CF

die

die anverlangte senkrechte.

Beweis. Denn F und C sind von D und E gemäß der Zurichtung gleich entfernet (§. 16); nun §. 40, also.

42. Aufg. Auf eine gerade Linie AB (Fig. 10) aus einem ausser ihr gegebenen Punkt C eine senkrechte zuziehen.

Auflös. Aus dem gegebenen Punkt C beschreibe man einen Bogen, welcher die gegebene Linie in zween Punkten D und E schneide, alsdan aus eben diesen zween Punkten D und E beschreibe man (mit kleinerem oder grösserem Halbmesser) zwei sich in F durchschneidende Bögen, die durch C nnd F gezogene gerade C G ist die verlangte senkrechte.

Beweis. Denn C und F sind von D und E gleich entfernet (§. 16); nun §. 40, also.

43. Aufg. Eine gerade Linie AB (Fig. 11) in zwei gleiche Stücke zutheilen.

Auflös. Man beschreibe aus den zween äussersten Punkten A und B zwei sich in C und D (oder in C und F) durchschneidende Bögen, von C zu D ziehe man eine gerade Linie, so ist die gegebne in E nach Verlangen entzweiet, nemlich AE = ED. r

Beweis. Denn C D ist vermöge gleiche Ent-

Entfernung der Punkte C und D von A und B (§. 16) zu AB senkrecht (§. 40), nun auch E ist von A und B gleich entfernet (§. 39); also AE = EB.

44. Lehrs. Die senkrechte AB (Fig. 12) ist aus allen geraden Linien, die aus einem Punkt A auf eine gerade CD gezogen können werden, die kürzeste.

Vorbereitung. Man verlängere AB bis in E solchergestalt, daß BE mit BA gleich werde; man ziehe alsdan von C zu E eine gerade Linie, so ist auch CE = CA. Denn gleichwie AE zu CB, eben so ist auch gegenmässig CB zu AE senkrecht (§. 35, 36), und, weil B von A und E gleich entfernet ist, so ist auch C davon gleich entfernet (§. 39), folglich CE = CA. Dies vorausgesetzt, sage ich: Jede andere AC (oder AD, AF, u. s. w.) ist länger, als AB.

Beweis. Denn AC + CE > AB + BE (§. 9), also ist auch $\frac{AC + CE}{2} > \frac{AB + BE}{2}$ (§. 31. VII), das ist (weil AC = CE, und AB = BE), AC > AB; folglich ist AB die kürzeste.

45. Folger. Wenn demnach eine Linie die kürzeste aus allen jenen geraden ist, welche aus einem Punkt auf eine andere gerade gezogen sind, so ist sie senkrecht.

46. Folger. Die Weite oder der Abstand eines Punktes von einer geraden Linie läßt sich am füglichsten durch die senkrechte vermög ihrer Beharrlichkeit abmessen.

47. Erklär. Nebenwinkel (anguli contigui) heissen jene zween Winkel gegeneinander, welche von zween geraden Linien, deren die eine auf der anderen aufsteht, gebildet werden, als ADC, und CDB (Fig. 13).

48. Lehrs. Die Nebenwinkel haben den halben Zirkelumkreis oder 180° zum Maß.

Beweis. Denn, wenn man aus dem gemeinschaftlichen Scheitel D einen halben Umkreis beschreibet, ist der Bogen AC das Maß vom Winkel m (§. 25), eben so ist CB das Maß vom n, folglich von beiden m und n ist das Maß AC + CB, das ist, der halbe Umkreis, oder 180° (§. 21).

49. Folger. Beide Nebenwinkel gleichen zween rechten. (§. 27).

50. Folger. Wenn das Maß eines Nebenwinkels bekant ist, so findet man auch das Maß des anderen, soferne man das Maß des bekanten aus 180° abzieht.

51. Folger. Wenn ein Nebenwinkel recht ist, so ist der andere auch recht; ist der eine scharf, so ist der andere stumpf; ist er stumpf, so ist der andere scharf (§. 27, 48).

52. Fol.

52. Folger. Wenn die zwei Nebenwinkel in wieviel immer kleinere getheilet werden, sie beziehen sämtlich nur 180°.

53. Erklär. Scheitelwinkel (anguli verticales) heissen jene zween Winkel, welche zwischen zween sich schneidenden geraden Linien MB, ND (Fig. 14) beidseits am Scheitelpunkt einander entgegengesetzet sind, als a und c, oder x und y.

54. Lehrs. Die Scheitelwinkel gleichen einander.

Beweis. Denn a + x = 180° (§. 48), auch x + c = 180° (§. 48), also a + x = x + c (§. 31. I.); nun von beiden gleiches x hinweggenommen (§. 31. V.), ist a = c (gleichergestalt x = y).

55. Erklär. Gleichlaufende Linien, sonst Parallelen, Parallellinien (lineæ Parallelæ) heissen jene Linien, welche überall von einander gleichweit entfernet sind, wenn sie auch ohnendlich verlängert würden.

56. Folger. Zwischen zween gleichlaufenden Linien sind alle senkrechte einander gleich. Denn die senkrechten darbieten die Entfernungen der Punkte der einen Linie von der anderen (§. 46); nun alle Punkte der einen gleichlaufenden Linie sind von der aderen gleich entfernet (§. 55).

57. Folger. Wenn also umgekehrt zwischen zween geraden Linien zwei senkrechte einander gleichen, so sind jene geraden Linien gleichlaufend (§. 7).

58. Folger. Die gleichlaufenden Linieu neigen sich demnach nirgends gegen einander, folglich stossen sie auch nirgends zusammen, wie immer sie verlängert werden.

59. Erklär. Wenn zwei gleichlaufende Linien AB, CD (Fig. 15.) von einer geraden EF durchgeschnitten werden, entstehen vier innerliche und vier äusserliche Winkel, welche gegen einander unterschiedlich benamset werden, (wir wollen nur die üblicheren davon anführen); so heißt n der **äusserliche** und x der **innerliche Winkel an der nemlichen Seite** (angulus externus, et internus ad eandem partem) (dies versteht sich auch von m und r, und dergleichen): y und x (oder p und r) die **zwei innerlichen an der nemlichen Seite** (interni ad eandem partem): p und x (oder y und r) die **innerlichen wechselseitigen Winkel oder Wechselwinkel** (anguli alterni interni).

60. Lehrs. Wenn zwei gleichlaufende Linien von einer geraden durchgeschnitten werden, so sind 1) der äussere n und innere Winkel x an der nemlichen Seite: 2) die inneren wechselseitigen Winkel p und x einander gleich; 3) die zween inneren Winkel y und x auf der nemlichen Seite betragen sämtlich 180°.

Beweis. 1) Man stelle sich vor, daß C D mit beidseitig gleicher Bewegung in die Lage A B vorrücke; gleichwie C D bei diesem Bedingniß auf A B, eben so wird der Winkel x auf n zuliegen kommen, und einander deken, wie es einleuchtend ist, folglich n = x (§. 31. IX).

2) n = p (§. 54), aber auch n = x (wie es erst bewiesen worden); also auch p = x.

3) n + y = 180° (§. 48), nun n = x (wie hier erstlich); also x + y = 180° (§. 31. II).

61. Folger. Wenn demnach zwei Linien von einer dritten geraden dergestalt durchgeschnitten werden, daß entweder 1) der äussere und innere Winkel an der nemlichen Seite einander gleich, oder 2) zwei innere wechselseitige einander gleich seien, oder 3) zwei innere Winkel an der nemlichen Seite 180° betragen, so sind solche durchgeschnittene Linien gleichlaufende.

62. Folger. Die gleichlaufenden Linien haben mit der durchschneidenden gleiche Neigungen. Denn derlei Neigungen bestehen in den Winkeln n und x, oder m und r (u. d. g.); nun diese sind gleich (§. 60).

63. Folger. Wenn also eine Linie zu einer der gleichlaufenden senkrecht ist, so ist sie es auch zu der andern, und umgekehrt, wenn die eine gleich-

gleichlaufende zu der schneidenden senkrecht ist, ist es auch die andere.

64. Folger. Zwischen zween geraden gleichlaufenden Linien sind alle senkrechten gleichlaufend. Denn die zwei inneren (nemlich rechten) Winkel an der nemlichen Seite sind = 180° (§. 60).

65. Aufg. Zu einer geraden Linie AB (Fig. 16) durch einen Punkt C eine gleichlaufende zuziehen.

Auflös. 1) Man lasse aus C auf AB eine senkrechte CD herab, alsdan errichte man aus einem andern Punkt E der gegebenen Linie eine senkrechte EF = DC; so ist die durch C und F gezogene gerade CF die anverlangte gleichlaufende; oder

2) Nachdeme die senkrechte CD gezogen worden, errichte man aus C zu CD die senkrechte CF.

Beweis. 1) Denn CD = FE, nun (§. 57); also.

2) Denn FCD + EDC = 180° (§. 61. N. 3).

66. Folger. Durch einen Punkt kan nur eine einzige gleichlaufende Linie gezogen werden. Gesetzt es könnte durch C nebst CF noch eine andere gleichlaufende Cn (einwärts oder auswärts) gezogen werden, so wäre FE = nE vermög FE = CD (§. 56); was ungereimt ist (Alg. 48).

III.

III. Kapitel.

Von Eigenschaften der Linien in Beziehung auf den Zirkelkreis.

67. Lehrs. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bögen.

Beweis. Es seien die Sehnen AB und BC (Fig. 17) gleich, so sind auch die Bögen AB und BC einander gleich. Denn (man ziehe die Halbmesser mA, mB, mC), wenn man sich den Ausschnit BmC auf den Ausschnit AmB hinübergeschoben vorstellet, so werden die Sehnen BC und AB vermöge Gleichheit einander genau deken; folglich werden auch die Bögen BC und AC vermöge gleicher Beugung (§. 15) einander deken, und derowegen gleichen (dies versteht sich auch von der Gegenseite der Sehnen).

68. Folger. Gegenmässigerweis besitzen gleiche Bögen gleiche Sehnen.

69. Folger. Eine grössere Sehne hat einen grösseren Bogen, eine kleinere einen kleineren, und gegenmässig.

Anmerk. Aus dem Lehrsatz §. 67. fliesset eine andere Weise nebst §. 65. durch einen Punkt G (Fig. 16) zu einer gegebenen geraden Linie BL eine gleichlaufende GK zuziehen, massen man

erstlich aus G mit beliebigem Halbmesser einen unbegrenzten Bogen H K, der die gegebne B L in H schneide, alsdan aus H mit dem nemlichen Halbmesser den Bogen B G bezeichnet, und ferner die Sehne B G des leztern in den ersten aus H nach K einträgt, sodan K mit G mittelst G K verbindet. Denn, wenn man B K zieht, ist vermöge des Bogens BG = HK (§. 67) der Winkel m = o, folglich G K mit B L gleichlaufend (§. 61, N. 2).

70. Lehrs. Gleiche Sehnen stehen gleichweit vom Mittelpunkt ab.

Beweis. Den Abstand der gleichen Sehnen A B, BC (Fig. 17) vom Mittelpunkt m bestimmen die senkrechten Linien m n, mv (§. 46); nun mn = m v. Denn, wenn der Ausschnit B m C auf A m B hinübergeschoben wird, gleichwie die Sehnen eine einzige ausmachen, und einander gänzlich deken, eben so bestellen m n, mv nur eine einzige senkrechte, und deken einander gänzlich; sonst würden zwei senkrechte Linien aus einem Punkt zu einer geraden gezogen können werden, was ungereimt ist (§. 38).

71. Folger. Eine kleinere Sehne ist vom Mittelpunkt weiter entfernet, als eine grössere. Denn m s ist die Entfernung der Sehne FG von m, und m x ist die Entfernung der Sehne D E von m; nun ms > mx (Alg. §. 48. N. 2).

72. Folger. Der Durchmesser ist aus allen Seh-

Sehnen die größte. Denn er ist vom Mittelpunkt nichts entfernet.

73. Lehrs. Eine senkrechte durch den Mittelpunkt m (Fig. 18) auf eine Sehne AB gezogene Linie mC schneidet sowohl 1) die Sehne in x, als auch 2) ihren Bogen ACB in C in zwei gleiche Theile.

Beweis. Denn, weil in solcher senkrechten Linie der Punkt m von A und B gleich entfernet ist (§. 16), so ist auch x und C von A und B gleich entfernet (§. 39); also ist 1) xA = xB, 2) vermöge der Entfernung oder Sehne AC = CB ist auch der Bogen AC = CB (§. 67).

74. Folger. Wenn diesemnach eine senkrechte Linie mC oder mx eine Sehne AB in x in zwei gleiche Stücke Ax = xB theilet, so reichet sie nothwendigerweis durch den Mittelpunkt m des Kreises, und schneidet den Bogen ACB in zwei gleiche Theile AC = CB. Gesetzt, sie reichete nicht durch den Mittelpunkt m, sondern durch einen andern darneben angeblichen Punkt d: doch läßt sich aus x durch m eine gerade Linie xm ziehen (§. 32 I.); aber diese xm, weil nebst x auch m von A und B gleich entfernet ist (§. 16), steht auf AB senkrecht (§. 39), also könten aus x zwei senkrechte Linien errichtet werden, was ohnmöglich ist (§. 37).

75. Aufg. Durch drei gegebne Punkte A, B, C (Fig. 19), massen sie nicht in einer gera-

den Linie liegen, einen Zirkelumkreis zuziehen.

Auflös. Man ziehe von einem Punkt zu dem anderen gerade Linien AB, BC, so darstellen sie Sehnen des zubezeichnenden Umkreises (§. 15). Man schneide sie alsdan senkrecht in zwei gleiche Theile (§. 43), so ist der Punkt m, wo sich die senkrechten Dm , Em durchkreuzen, der Mittelpunkt des verlangten Umkreises; man hat demnach aus m mit dem Halbmesser m A (mit der Entfernung des Durchschnitspunkts m von jedemz der gegebnen dreien) den verlangten Umkreis ubeschreiben.

Beweis. Denn sowohl Dm als Em reichet durch den Mittelpunkt (§. 74), weil sich also zwei gerade Linien nur in einem Punkt schneiden können (§. 8), und der Kreis nur einen Mittelpunkt enthält (§. 15), ist m der gesuchte Mittelpunkt.

76. Folger. Wenn solchemnach ein Punkt inner dem Kreis von dreien Punkten des Umkreises gleichweit abstehet, so ist er dessen Mittelpunkt.

77. Folger. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 20) einer geraden Linie kan keine Zirkellinie gezogen werden. Denn, weil die senkrechten ED, GF (§. 75) gleichlaufend sind (§. 61), stossen sie nirgends zusammen (§. 58); folglich ist kein Mittelpunkt möglich.

78. Folger. Eine gerade Linie kan also

einem

einem Umkreis nicht in dreien Punkten begegnen.

79. Aufg. Den unbekanten Mittelpunkt eines Kreises oder eines Bogens zufinden.

Auflös. Man ziehe zwei Sehnen, und halbire sie senkrecht (§. 43); der gemeinschaftliche Durchschnitspunkt der senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt (wie §. 75. Beweis).

80. Aufg. Einen Zirkelbogen ADB (Fig. 21) in gleiche Theile zuentzweien.

Auflös. Man bezeichne den gegebenen Bogen ADB mit der angehörigen Sehne AB, und halbire sie senkrecht durch CD; so ist auch der Bogen in D gehörig entzweiet (§. 74).

81. Aufg. Einen gegebenen Winkel AmB (Fig. 22) gleich zuentzweien.

Auflös. Man beschreibe aus dem Scheitel m mit beliebigem Halbmesser einen Bogen ACB, unterzeichne ihn mit der gehörigen Sehne AB, und schneide diese durch mE senkrecht in zwei gleiche Theile (§. 43), so ist AmC = CmB.

Beweis. Denn AC = CB (§. 74), also vermöge gleicher Maß auch AmC = CmB (§. 25).

82. Lehrs. Gleichlaufende Sehnen AB, CD (Fig. 23) schliessen gleiche Bögen AC, BD, ein.

Be-

Beweis. Man ziehe auf A B durch den Mittelpunkt m die senkrechte EF, so ist AC + CF = FD + DB (§. 73, N. 2); aber auch CF = FD (aus gleichem Grund), also gleiches von gleichen hinweggenommen ist AC = DB (§. 31. V.).

83. Folger. Wenn solchemnach umgekehrt Sehnen gleiche Bögen einschliessen, so sind sie gleichlaufend.

84. Erklär. **Berührlinie** (linea tangens) heißt jene gerade Linie, welche dergestalt an den Umkreis stößt, daß sie, auch verlängert, nur einen einzigen Punkt im Umkreis die anderen aber alle ausser demselben habe, wie CD (Fig. 24). Eben solcher gemeinschaftlicher Punkt B des Umkreises und der Berührlinie heist der **Berührungspunkt** (punctum contactus). **Schneidende Linie**, oder **Schneidlinie** des Kreises (secans) ist eine gerade Linie, wovon sich ein Theil innerhalb des Kreises, der andere Theil ausserhalb desselben befindet, wie AB oder AC (Fig. 32).

85. Lehrs. Der Halbmesser MB (Fig. 24) am Berührungspunkt steht senkrecht auf der Berührlinie CD.

Beweis. Denn, weil sich der Berührungspunkt B nur allein im Umkreis befindet die anderen aber alle daraussen (§. 84), so ist seine Entfernung vom Mittelpunkt, welche der Halbmesser MB ist (§. 10), die kürzeste aus allen geraden Linien,

die

die aus M auf CD gezogen können werden; nun §. 45, also.

86. Folger. Wenn demnach auf einer geraden Linie der Halbmesser (mit seinem Endpunkt) senkrecht steht, so ist sie eine Berührlinie.

87. Folger. Die Berührlinie G H (Fig. 23) schliesset auch mit einer gleichlaufenden Sehne CD, eben so wie zwei gleichlaufende Sehnen (§. 82) gleiche Kreisbögen ein. Denn der Halbmesser m F am Berührungspunkt ist nicht nur zu GH (§. 85), sondern auch zu CD senkrecht (§. 63), folglich ist CF = F D (§. 73).

88. Aufg. Den Berührungspunkt einer Berührlinie CD (Fig. 24.) zubestimmen.

Auflös. Man lasse aus dem Mittelpunkt M auf CD eine senkrechte Linie herab (§. 42), so ist B der gesuchte Berührungspunkt (§. 85).

IV. Kapitel.

Vom Maß der Winkel, die von solchen geraden Linien, welche sich bloß auf den Zirkelkreis beziehen, gebildet werden.

89. Lehrs. Der Winkel A B C (Fig. 25), welcher am Umkreis von einer Berührlinie AB, und einer Sehne BC gebildet wird, hat zum Maß die Helfte des von solcher Sehne abgeschnittenen Bogens BEC.

Beweis. Man ziehe 1) den Durchmesser EF zu BC senkrecht: 2) den Durchmesser GH mit BC gleichlaufend: 3) den Halbmesser MB zum Berührungspunkt, so sind ABM und EMG rechte Winkel (§. 85, 34), folglich ABM = EMG, also auch ABC + CBM = EMB + BMG (Alg. §. 48. N. 1); nun CBM = BMG (§. 60. N. 2), also auch ABC = EMB; nun EB ist das Maß von EMB (§. 25), also ist er es auch von ABC; nun EB ist die Helfte von BEC (§. 73), also. (Gleiches versteht sich auch von DBC an der Gegenseite von BC).

90. Lehrs. Der Winkel ABC (Fig. 26), welcher am Umkreis von zween Sehnen AB, BC gebildet wird, hat zum Maß die Helfte des Bogens AC, auf welchem seine Schenkel stehen.

Beweis. Man stelle sich am Scheitel B eine

Be-

Berührlinie DE vor, so haben die Winkel $x + y + z$ den halben Umkreis nemlich $\frac{1}{2}$ BA + $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CB zum Maß (§. 48, 52); nun x bezieht $\frac{1}{2}$ BA (§. 89), und z bezieht $\frac{1}{2}$ CB (aus gleichem Grund), also für y oder ABC bleibet $\frac{1}{2}$ AC.

91. Folger. Der Winkel AMC am Mittelpunkt ist zweimal so groß, als jener y am Umkreis, der auf gleichem Bogen AC steht. Denn AMC hat ganz AC (§. 25): y aber halb AC zum Maß (§. 90).

92. Folger. Jener Winkel ACB (Fig. 27) am Umkreis, dessen Schenkel auf den äussersten Punkten A und B des Durchmessers aufstehen, ist recht. Denn ihm messet die Helfte des Halbumkreises, oder 90° (§. 18, 90).

93. Folger. Alle Winkel o, v, x (Fig. 27) am Umkreis, die auf gleichem Bogen stehen, sind gleich wegen gleichen Maß $\frac{1}{2}$ DACBE (§. 90).

94. Aufg. Aus einem Endpunkt A (Fig. 28) einer geraden Linie AB eine senkrechte zu errichten.

Auflös. Man wähle ober der gegebenen Linie einen beliebigen Punkt M, aus welchem man mit dem Halbmesser MA einen Kreis beschreibe, der die gegebne AB (etwan auch verlängert) irgendwo

gendwo in D schneide. Durch D und M ziehe man DC, so wie AC durch A und C; AC ist die anverlangte senkrechte. Denn CAD ist ein rechter Winkel (§. 92, 35).

Aufg. Aus einem im Umkreis gegebnen Punkt A (Fig. 29) eine Berührlinie zuziehen.

Auflös. Man ziehe aus A den Halbmesser AM, alsdan errichte man aus A die senkrechte AB (§. 94), so ist AB die verlangte Berührlinie (§. 86).

96. Folger. Durch einen in dem Umkreis gegebnen Punkt A kan nur eine einzige Berührlinie gezogen werden. Denn nur eine einzige senkrechte AB kan daraus errichtet werden (§. 37).

97. Aufg. Aus einem ausser dem Kreis gegebenen Punkt B (Fig. 29) eine Berührlinie zuziehen.

Auflös. Man ziehe aus dem Mittelpunkt zu dem gegebnen B die gerade BM, und beschreibe aus ihrer Mitte C einen Kreis; aus A, wo dieser den Umkreis schneidet, ziehe man AB, so ist AB die verlangte Berührungslinie. Denn, wenn man den Halbmesser AM zieht, ist AB (vermöge des rechten Winkels BAM §. 92) auf AM senkrecht (§. 34), folglich berühret sie den Kreis (§. 85).

98. Folger. Durch einen ausser dem Umkreis gegebnen Punkt B können zwei Berührlinien nem-

lich

lich die eine B A von der einen, die andere B M von der andern Seite des Umkreises gezogen werden.

99. Lehrs. Der Winkel A B C (Fig. 30), welcher am Umkreis von einer Sehne B C und einer Schneidlinie A D gebildet wird, hat zum Maß die halbe Summe der zween von der Sehne und von der Schneidlinie abgeschnittenen Bögen CB und BD.

Beweis. Denn AB C+C B D, als zwei Nebenwinkel (§. 47), haben den halben Umkkreis $\frac{1}{2}$ D C + $\frac{1}{2}$ C B + $\frac{1}{2}$ B D zum Maß (§. 48); nun C B D bezieht $\frac{1}{2}$ C D (§. 90), also für A B C bleibet $\frac{1}{2}$ C B + $\frac{1}{2}$ B D.

100. Lehrs. Der Winkel a (Fig. 31), dessen Scheitel sich zwar ausser dem Mittelpunkt doch inner dem Umkreis befindet, hat zum Maß die halbe Summe der von den verlängerten Schenkeln beiderseits eingeschlossenen Bögen $\frac{1}{2}$ B D + $\frac{1}{2}$ E F.

Beweis. Man ziehe zu F B die gleichlaufende Sehne E G, so ist a = y (§. 60); nun y bezieht $\frac{1}{2}$ B D + $\frac{1}{2}$ G B (§. 90), also bezieht auch a eben solches Maß; nun G B = E F (§. 82), also (gleiches für gleiches ansetzend) a bezieht $\frac{1}{2}$ B D + $\frac{1}{2}$ E F. (Gleiches versteht sich von E a B).

101. Lehrs. Der Winkel B A C (Fig. 32),

wessen Scheitel ausser den Umkreis reichet, beziehet zum Maß den halben Unterscheid der von den Schenkeln beiderseits eingeschlossenen Bögen $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ DE.

Beweis. Man ziehe zu DB die gleichlaufende Sehne EF, so ist CEF = CAB (§. 60); nun CEF bezieht $\frac{1}{2}$ FC (§. 90), also auch CAB bezieht $\frac{1}{2}$ FC; nun FC = BC — BF (wie es aus Betrachtung dieser zween Bögen einleuchtend ist), und BF = DE (§. 82), also BAC, bezieht $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ DE.

102. Folger. Wenn des erwehnten Winkels entweder einer, oder beide Schenkel den Umkreis nicht schneiden, sondern nur berühren, so bestehet ebenfals der (§. 101) angeführte Lehrsaz. So hat BAC (Fig. 33) zum Maß $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ DC. Denn, wenn man AC bis E verlängert, und zu AB die gleichlaufende Sehne CF zieht, so ist EAB = ECF (§. 60), und bezieht derohalben gleiches Maß $\frac{1}{2}$ FC (§. 89) = $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ DC. Gleichergestalt erhält GAC zum Maß $\frac{1}{2}$ GBC — $\frac{1}{2}$ GDC.

103. Folger. Je weiter demnach der Scheitel eines Winkels von dem Bogen (oder geraden Linie) AB (Fig. 34), auf wessen Endpunkten seine Schenkel aufstehen, abweichet, desto kleiner ist solcher Winkel. Denn m sei der Mittelpunkt des Umkreises, so ist $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ FDEG das Maß vom Winkel y (§. 100), AB von m (§. 25), $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ DE von o (§. 100), $\frac{1}{2}$ AB von p (§. 90)

(§. 90), $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ DE von x (§. 101); nun $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ DE < $\frac{1}{2}$ AB < $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ DE < AB < $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ FDEG, wie es einleuchtend ist.

V. Kapitel.

Von Eigenschaften der Zirkellinien gegeneinander.

104. Erklär. Umkreise, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt m (Fig. 35), aber ungleiche Halbmesser haben, heissen gleichlaufende Zirkellinien oder Umkreise (peripheriæ parallelæ, v concentricæ).

105. Lehrs. Wenn Umkreise in dreien gemeinschaftlichen Punkten überein kommen, so kommen sie in allen übrigen überein, und gleichen einander.

Beweis. Denn, wenn man durch solche drei Punkte Sehnen zieht, und diese senkrecht in zwei gleiche Stüke schneidet (§. 43), so haben die Umkreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, und Halbmesser (§. 75, 76).

106. Folger. Zwei Umkreise können sich diesemnach in dreien Punkten nicht schneiden.

107. Folger. Wenn sich zwei Umkreise A

y v s A und B s v B schneiden, so können sie sich nur in zween Punkten s und v schneiden.

108. Folger. Zwei Umkreise können sich deswegen nur in einem Punkt berühren.

109. Lehrs. Der Berührungspunkt; und beide Mittelpunkte zwoer sich berührenden Umkreise liegen in einer geraden Linie.

Beweis. Es geschehe die Berührung von innen in x (Fig. 36), so sind beide Halbmesser M x, C x in x zu A B senkrecht (§. 85); nun §. 37, also M C x ist eine gerade Linie. Man nehme die Berührung von aussen auch in x an, so ist M x N die kürzeste aller jener Linien, M o y N, die durch M N gezogen können werden, weil M x und N x die Halbmesser sind, die im gemeinschaftlichen Berührungspunkt x zusammenstossen, jede andere Linie M o y N aber nebst den zween Halbmessern M o, N y (§. 16) noch den Raum o y enthält; nun die kürzeste Linie zwischen zween Punkten ist gerad (§. 9), also M x N ist eine gerade Linie; also.

110. Aufg. Den gemeinschaftlichen Berührpunkt zwoer Umkreise zubestimmen.

Auflös. Man ziehe durch die zwei Mittelpunkte eine gerade Linie; der Punkt, wo sie den Umkreis belanget, ist der gesuchte (§. 109).

VI.

VI. Kapitel.

Von Kentnissen der Vieleke insgemein, und von Eigenschaften der Dreieke insbesondere.

111. Erklär. Vielek (polygonum πολυγωνον) heißt überhaupt ein von geraden Linien eingeschlossener Raum: eben solche Linien, welche durch ihr Zusammentrefen die Eke bilden, einzeln die Seiten (latera) dessen: alle sämtlich aber, massen sie das Vielek schliessen, der Umfang (perimeter περιμετρος). Ein auswärtsreichendes Ek oder Winkel (angulus procurrens) ist, dessen Scheitel ausser das Vielek gerichtet ist: einwärtsreichendes (regrediens) hingegen, dessen Scheitel inner dasselbige fällt. Das Vielek heißt in Rücksicht auf die Anzahl der Eke sonderheitlich ein Dreiek, Vierek, Fünfek, Sechsek, u. s. w. Doch bestehet ein jedes Vielek aus eben soviel Seiten, als Eken.

112. Erklär. Die Vieleke werden in regelmässige (polygona regularia), und unregelmässige (irregularia) eingetheilet. Ein regelmässiges Vielek ist jenes, in welchem sowohl alle Seiten einander als auch alle Winkel einander gleichen (massen diese alle auswärts reichen): im widrigen Fall sind sie unregelmässig.

113. Erklär. Einerlei Gattung Vieleke (polygona ejusdem speciei) heissen jene Vieleke gegeneinander, welche aus gleichvielen Seiten

bestehen: widrigens verschiedenerlei (diversæ speciei).

114. Erklär. Aehnliche Vieleke (polygona similia) sind jene einerlei Vieleke gegeneinander, deren die Winkel des einen den Winkeln des anderen Vieleks ordentlich (der erste dem ersten, der zweite dem zweiten, u. s. w.) gleich, und die angehörigen Seiten verhältnißmässig sind.

115. Erklär. Aehnliche und gleiche Vieleke sind jene einerlei Vieleke, deren die Winkel und Seiten des einen den Winkeln und Seiten des anderen Vieleks ordentlich gleich sind.

116. Erklär. Das Einfachste Vielek ist das Dreiek (triangulum, trigonum τρίγωνον), nemlich ein von dreien Linien eingeschränkter Raum. Gerade Linien darstellen ein geradlinigtes: krumme ein krumlinigtes Dreiek. Der Zwek ist hier nur auf das geradlinigte Dreiek gerichtet.

117. Erklär Wenn man sich ein Dreiek ABC (Fig. 39) auf einer der dreien Seiten nach Belieben gleichsam aufgestellet vorbildet, so heißt solche Seite B C die Grundlinie (basis): die übrigen zwei Seiten AB, AC die Schenkel (crura): das Ek A, welches der Grundlinie gegenübersteht, der Scheitel (vertex): und die senkrechte A D aus dem Scheitel auf die Grundlinie die Höhe (altitudo) des Dreieks (§. 46).

118. Erklär. Das Dreiek wird in Ansehung

hung sowohl der Seiten als der Winkel dreifach betrachtet. In Ansehung der Seiten heißt es ein **gleichseitiges Dreiek** (triangulum æquilaterum), wenn alle drei Seiten untereinander gleich sind, ein **gleichschenklichtes** (æquicrurum, vIsosceles): wenn zwei Seiten einander gleichen; ein **ungleichseitiges** (scalenum): wenn alle drei Seiten untereinander ungleich sind. In Ansehung der Winkel ist es ein **rechtwinklichtes** (triangulum rectangulum), wenn es einen rechten: ein **stumpfwinklichtes** (obtusangulum), wenn es einen stumpfen Winkel: **spiz = oder scharfwinklichtes** (acutangulum), wenn es bloß scharfe Winkel enthält. Die zwei letzten werden überhaupt **schiefe Dreieke** (obliquangula) genennet.

119. **Erklär.** Jene Dreieke, welche gleichen Raum oder Fläche enthalten, werden bloß und überhaupt **gleiche** genennet.

120. **Erklär.** Die **Aehnlichkeit der Dreieke** erhellet zwar aus der allgemeinen Erklärung der Vieleke (§. 114), da aber die Verhältnißmässigkeit der Seiten aus der Gleichheit der Winkel (obwohlen auch umgekehrt) in den Dreieken folget, wie wir es sehen werden, so werden wir nicht ohne geringen Vortheil jene Dreieke **ähnliche** heissen, in welchen alle Winkel des einen den Winkeln des anderen ordentlich gleichen. Jene Seiten, die gleichen Winkeln in ähnlichen Dreieken gegenüberstehen, können gegeneinander der Kürze halber **die einander entsprechenden Seiten** (latera homologa) genennet werden.

121. **Erklär.** Aehnliche und gleiche Dreieke sind jene, deren die Winkel und Seiten des einen den Winkeln und Seiten des anderen Dreieks ordentlich gleichen (§. 115).

122. **Folger.** Wenn demnach zwei Dreieke so beschafen sind, daß in ihnen entweder 1) zwei Seiten AB, ab, und BC, bc (Fig. 37) mit dem inbegrifenen Winkel B und b: oder 2) zwei Winkel B, b und C, c mit der inbegrifenen Seite BC, bc: oder 3) alle drei Seiten AB, ab; BC, bc; AC, ac einander ordentlich gleichen, so sind sie einander gänzlich gleich, und ähnlich. Denn, wenn sie gehörig aufeinander gelegt werden, deken sich auch alle die übrigen Theile vollkommen, wie es einleuchtend ist; nun §. 31 IX. 121.

123. **Folger** Wenn man im gleichschenklichten Dreiek aus der Mitte der ungleichen Seite BC (Fig. 39) durch den gegenüberstehenden Winkel eine gerade Linie DA (welche nothwendigerweis senkrecht ist §. 40) zieht, so theilet diese das Dreiek in zwei gleiche Dreieke ADB = ADC (§. 122. N. 3).

124. **Lehrs.** In jedem Dreiek ABC (Fig. 38) enthalten alle drei Winkel 180 Grade.

Beweis. Man beschreibe um das Dreiek einen Umkreis (§. 75. die Scheitel der Eke als drei gegebne Punkte: die Seiten als Sehnen betrachtend); so bezieht der Winkel A den halben Bogen BC (§. 90), eben so eignet sich B halb

AC

A C zu, und C halb A B, folglich haben sämtlich alle drei Winkel A + B + C den halben Umkreis $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ A C + $\frac{1}{2}$ A B zum Maß; nun §. 21, also.

125. Folger. Alle drei Winkel eines Dreiekes gleichen demnach zween rechten (§. 27).

126. Folger. In einem Dreiek ist nur ein einziger rechter, oder ein einziger stumpfer Winkel möglich. Sonst würden in einem Dreiek alle drei Winkel mehr als 180° enthalten.

127. Folger. Wenn sich in einem Dreiek ein rechter oder stumpfer Winkel befindet, so sind die anderen zween scharf.

128. Folger. In einem rechtwinklichten Dreiek betragen die zween scharfen Winkel sämtlich 90°.

129. Folger Wenn in einem rechtwinklichten Dreiek ein scharfer Winkel bekant ist, so läßt sich auch alsogleich der andere scharfe finden, soferne man das Maß des bekanten von 90° abzieht. Enthält diesemnach der eine 45°, so enthält der andere eben soviele.

130. Folger. Wenn in einem Dreiek ein Winkel bekant ist, so läßt sich durch Abzug dessen aus 180° auch die Summe der anderen zween bestimmen.

131. **Folger.** Wenn die Summe zwoer Winkel eines Dreiekes bekant ist, läßt sich der dritte durch Abzug solcher Summe aus 180° bestimmen.

132. **Folger.** Wenn in einem Dreiek zwei Winkel einzeln oder sämtlich zweien Winkeln einzeln oder sämtlich in einem anderen Dreiek gleichen, so gleichet auch der dritte Winkel dem dritten, und umgekehrt.

133. **Folger.** Wenn aus einem Winkel A (Fig. 39) eines Dreiekes A B C auf die Grundlinie B C eine senkrechte A D gezogen wird, und die Winkel an der Grundlinie scharf sind, so fallet die senkrechte Linie nothwendigerweis inner die Grundlinie: ist aber einer der an der Grundlinie anliegenden Winkel stumpf, so fällt solche senkrechte A D ausser die Grundlinie B C z. B. auf D (Fig. 40). Gesetzt, sie fiele im ersten Fall ausser die Grundlinie z. B. auf E (Fig. 39), so wäre im Dreiek E A C der Winkel E ein rechter (§. 34), aber der Winkel A C E ist stumpf, weil sein Nebenwinkel A C D (wie man angenommen hat) scharf ist (§. 51), folglich wären in einem Dreiek ein rechter und ein stumpfer Winkel, was unmöglich ist. Gleiches würde im Dreiek A E C (Fig. 40) im zweiten widrigen Fall erfolgen.

134. **Lehrs.** In jedem Dreiek A B C (Fig. 38.) entspricht einem grösseren Winkel eine grös-

sere Seite: einem kleineren eine kleinere; und umgekehrt.

Beweis. 1) Es sei (nach umgeschriebenen Umkreis) A > B, so ist $\frac{1}{2}$ des Bogens BC > $\frac{1}{2}$ AC (§. 90), also auch der ganze Bogen BC > AC (§. 31. VII.); nun ein grösserer Bogen hat eine grössere Sehne, (§. 69), also ist die Sehne oder Seite BC > AC.

2) Es sei umgekehrt die Seite oder Sehne BC > AC, so ist der ganze Bogen BC > AC (§. 69), also auch $\frac{1}{2}$ Bogen BC > $\frac{1}{2}$ AC (§. 31. VII); nun $\frac{1}{2}$ Bogen BC ist das Maß von A, gleichergestalt $\frac{1}{2}$ AC ist das Maß von B, also der Winkel A > B.

135. Folger. In jedem Dreiek entsprechen demnach gleichen Winkeln gleiche Seiten; und umgekehrt.

136. Folger. Wenn demnach in einem Dreiek zwei Winkel einander gleichen, so ist es ein gleichschenklichtes Dreiek, und umgekehrt (§. 134, 118).

137. Folger. Wenn in einem Dreiek alle drei Winkel einander gleichen, so ist es ein gleichseitiges Dreiek, und jeder Winkel enthält 60°, und umgekehrt.

138. Folger. Wenn in einem gleichschenklichten oder gleichseitigen Dreiek ein Winkel bekant

ist,

ist, so lassen sich auch die übrigen zween alsogleich bestimmen (130).

139. Folger. Wenn in zween gleichschenklichten Dreieken ein Winkel gleich ist, so sind auch die übrigen zween einander einzeln gleich, folglich sind es ähnliche Dreieke (§. 120). Denn solch gleicher Winkel ist entweder von den zween Schenkeln eingeschlossen, oder er stehet einem derenselben gegenüber: im ersten Fall hat man ihn nur von 180° abzuziehen, so sind die übrigen zween Winkel einander sämtlich und einzeln gleich (§. 130, 135): im zweiten Fall ist er doppelt von 180° abzuziehen (§. 135), so ist der dritte Winkel dem dritten gleich (§. 131).

140. Folger. Das gleichseitige Dreiek ist also ein regelmässiges Dreiek (§. 112).

141. Erklär. Der äussere Winkel eines Dreiekes heißt jener ABD (Fig. 41), welcher von einer verlängerten Seite CD von aussen gebildet wird.

142. Lehrs. Wenn in einem Dreiek ABC (Fig. 41) eine Seite BC verlängert wird, so ist der äussere Winkel DBA denen zween inneren entgegengesetzten A und C sämtlich gleich.

Beweis Denn DBA + ABC = 180° (§. 48); aber auch ABC + A + C = 180° (§. 124), also DBA + ABC = ABC + A + C (§. 31. I.); nun ABC = ABC, also

(glei-

(gleiches von gleichen hinweggenommen) DBA = A + C.

143. Lehrs. Wenn aus zween ähnlichen ungleichen Dreieken das kleinere abc (Fig. 42) auf das grössere ABC gemäß den entsprechenden Seiten und Winkeln gehörig geleget wird, so ist die dritte Seite bc des einen mit der dritten BC des anderen gleichlaufend.

Beweis. Denn vermöge der Aehnlichkeit der Dreieke gleichet in solchem Fall der äussere Winkel Abc dem inneren ABC an der nemlichen Seite; nun §. 61, also.

144. Folger. Wenn demnach (umgekehrt) eine Linie bc zwei Seiten AB, AC eines Dreiekes dergestalt schneidet, daß sie mit der dritten Seite BC gleichlaufe, so sind die zwei Dreieke Abc, ABC, welche dadurch entstehen, einander ähnlich.

VII. Kapitel.

Von Eigenschaften der Viereke.

145. Erklär. Vierek (quadrangulum, tetragonum) ist ein von vier geraden Linien eingeschlossener Raum.

146. Erklär. Das Vierek kan überhaupts füglich in ein gleichlaufendes und ungleichlaufendes eingetheilet werden. Ein Gleichlaufendes, sonst Parallelogram (parallelogrammum) ist es, wenn die zween und zween entgegengesetzten Seiten gleichlaufend sind: widrigens ein ungleichlaufendes (trapezium). Das gleichlaufende zehlet manche Gattungen: gleichseitiges Rechtek, sonst Qwadrat (quadratum Geometricum) heißt es, wenn sowohl alle vier Seiten untereinander gleich als auch alle vier Winkel untereinander gleich und recht sind, folglich wenn es ein regelmässiges Vierek ist (§. 112), wie Fig. 43. Sind zwar alle vier Winkel recht, aber nur zwei und zwei entgegengesetzte Seiten einander gleich, so heißt es ein länglichtes Rechtek (rectangulum), wie Fig. 46. Eine Raute oder gleichseitige Raute, gleichseitiges Schiefek (rhombus) bestehet aus vier gleichen Seiten, und nur zween und zween entgegenstehenden einander gleichen Winkeln, wie Fig. 44; sind aber nur zwei und zwei entgegengesetzte Seiten einander gleich, so ist es eine länglichte Raute, länglichtes Schiefek (rhomboides), wie Fig. 45. Ausser diesen Eigenschaften ist es überhaupt ein ungleichlaufendes Vierek (trapezium), wie A C D B A Fig. 72.

147. Erklär. Zwerchlinie (diagonalis διαγωνιος) ist eine gerade Linie, welche in einem Vielek aus einem Winkel zu dem anderen gegenüber gezogen wird, wie AC (Fig 46).

148. Lehrs. Alle vier Winkel in jedem Vierek enthalten sämtlich 360°.

Beweis. Man ziehe durch zwei entgegenstehende Winkel (wie Fig. 46) eine Zwerchlinie, so entstehen zwei Dreieke, in deren beiden alle drei Winkel 180° (§. 124), folglich sämtlich 360° enthalten.

149. Folger. Wenn demnach von einem gleichseitigen Rechtek nur eine Seite: von einem länglichten Rechtek zwei aneinander stossende Seiten: von einer Raute aber zwei aneinander stossende Seiten mit dem inbegrifenen Winkel bekant sind, so kan das ganze Vierek aufgezeichnet und bestimmet werden (§. 65).

150. Lehrs. Jedes gleichlaufendes Vierek wird durch die Zwerchlinie in zwei einander ähnliche und gleiche Dreieke ACB, ACD (Fig. 46) getheilet.

Beweis. Denn vermöge der gleichlaufenden Seiten (§. 146) ist m = n, und x = o (§. 60. N. 2), also haben die zwei Dreieke ACB, ACD zwei gleiche Winkel m, n und x, o mit der inbegrifenen (gemeinschaftlichen) Seite AC, folglich gleichen sich diese Dreieke gänzlich (§. 121).

151. Folger. In einem gleichlaufenden Vierek sind demnach die zwei und zwei entgegen-stehenden Seiten nicht nur gleichlaufend, sondern auch einander gleich. Denn, wenn ACD auf CAB geleget wird, deken sich gänzlich sowohl BC und AD; als AB und DC.

152. Folger. Wenn demnach in einem Vierek zwei entgegengesezte Seiten einander gleich, und gleichlaufend sind, so sind es auch die anderen zwei Seiten; folglich ist solches ein gleichlaufendes Vierek.

153. Folger. Zwei (oder mehrere) gleichlaufende von zween gleichlaufenden begrenzte Linien sind einander gleich, sie mögen senkrecht (§. 56) oder schräge sein.

154. Folger. Weil die Zwerchlinie das gleichlaufende Vierek in zwei gleiche und ähnliche Dreieke theilet, welche gleiche Grundlinien AB, DC, und gleiche Höhe mit dem Vierek haben, (§. 117, 56), so kan man ein Dreiek als die Helfte eines gleichlaufenden Viereкes von gleicher Grundlinie und Höhe ansehen.

Anmerk. Wir wollen hier obschon ausser der gehörigen Ordnung zur ferneren vortheilhafteren Fortschreitung den Flächeninhalt des gleichlaufenden Viereks, und dessen Helfte in etwas vorläufig berühren.

155.

155. Erklär. Ein gleichlaufendes Vierek ACDB (Fig. 47 und 48) entstehet, wenn sich eine Grundlinie AB nach der Richtung einer anderen Linie AC hinwegbeweget, und ohnunterbrochen Spuren nach sich dergestalt zurükläßt, daß alle ihre Spuren mit ihr, folglich auch untereinander gleichlaufend seien. Ist AC zu AB senkrecht, so entstehet ein rechtwinklichtes (Fig. 47), ist aber AC schief: ein schiefes Vierek (Fig. 48). Man kan also in Rüksicht solcher Erzeugungsart annehmen, daß die Grundlinie so oft neben sich gesetzet sei, als in des Viereks Höhe EF Punkten sind (denn das schiefe Vierek ACDB (Fig. 48) gleichet dem rechtwinklichten AMNB vermög des Dreiekes DNB = MCA).

156. Folger. Der Flächeninhalt eines gleichlaufenden Viereks gleichet diesemnach dem Erzeugniß aus der Grundlinie und Höhe.

157. Folger. Weil das Dreiek die Helfte eines gleichlaufenden Viereks von gleicher Grundlinie und Höhe ist (§. 154), so gleichet die Fläche des Dreiekes dem halben Erzeugniß aus der Grundlinie, und Höhe; das ist: dem Erzeugniß aus der halben Grundlinie, und ganzen Höhe, oder umgekehrt.

158. Folger. Wenn zwoer Dreieke D und d die Grundlinien durch G und g: die Höhen durch H und h vorgestellet werden, so ist $D = \frac{1}{2}GH$, und $d = \frac{1}{2}gh$ (§. 157), folglich $D:d = \frac{1}{2}GH:\frac{1}{2}gh$ (Alg. §. 235), oder $D:d =$

D

GH : gh (Alg. §. 225); ist nun die Höhe H=h, so läßt sich die zweite Verhältniß in dieser Verhältnißgleichung D : d = G H : g h durch H und h theilen (Alg. §. 225), wodan erfolget D : d= G : g; das ist: wenn zwei Dreieke gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich gegeneinander, wie ihre Grundlinien. Ist aber G=g, so läßt sich in D : d = GH : gh die zweite Verhältniß durch G und g theilen, folglich ist D : d = H : h; das ist: Wenn zwei Dreieke gleiche Grundlinien haben, so sind sie gegeneinander, wie ihre Höhen.

159. Folger. Wenn demnach zwei Dreieke gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind sie in Rüksicht ihres Flächeninhaltes einander gleich. Denn, weil in solchem Fall, G = g, und H = h, wenn in D : d = GH : gh die zweite Verhältniß durch G und g, H und h getheilet wird, erfolget D : d = 1 : 1; nun 1 = 1, also auch D = d.

160. Folger. Wenn sich diesemnach zwei oder mehrere Dreieke zwischen zween gleichlaufenden Linien auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie befinden, gleichen sie einander. Denn nebst gleicher Grundlinie haben sie auch gleiche Höhe (§. 117, 56, 159).

161. Folger. Es können also zwei Dreieke einander der Fläche nach gleich sein, ohne zugleich auch ähnlich zu sein (§. 119).

VIII.

VIII. Kapitel.

Von Eigenschaften der übrigen Vieleke überhaupt.

162. Lehrs. Jedes Vielek A B C D E (Fig. 49), welches bloß aus auswärtsreichenden Eken bestehet, kan in eben soviele Dreieke, als dasselbige Seiten enthält, getheilet werden, soferne aus einem inner dem Umfang angenommenen Punkt O zu allen Winkeln gerade Linien gezogen werden.

Beweis. Man zehle nur sowohl die Dreieke, die solchermassen in welch immer einem Vielek entstehen, als auch die Seiten des Vielekes; so ist man solcher Wahrheit alsogleich überzeugt.

163. Lehrs. Die Winkel eines Vielekes betragen sämtlich soviel mal, als im Vielek Seiten sind, 180 Grade weniger 360°

Beweis. Jedes Vielek kan in soviele Dreieke aus einem darinnen angenommenen Punkt O (Fig. 49) getheilet werden, als es Seiten enthält (§. 162); nun die Winkel eines jeden Dreiekes betragen 180° (§. 124), also betragen die sämtlichen Winkel aller Dreieke soviel mal 180°, als im Vielek Seiten sind; nun die Winkel, welche sich um den angenommenen Punkt befinden, sind nicht Winkel des Vielekes (denn diese sind nur am Umfang), also muß ihr Maß oder 360°

 (§. 26)

(§. 26) von der Summe aller Winkel abgezogen werden, um den Betrag der Winkel des Vielekes zuerhalten.

164. Folger. Wenn man demnach die Summe aller Winkel eines regelmässigen Vielekes mit der Anzahl der Seiten theilet, so findet man den allgemeinen Winkel eines solchen Vieleks (§. 112).

165. Lehrs. In jedem regelmässigen Vielek giebt es ein Punkt, der von den Scheiteln aller Winkel gleich entfernet ist.

Beweis. Man theile zwei nächste Winkel A und B (Fig. 50) eines derlei Vielekes durch Am und Bm in zwei gleiche Theile (§. 81); der Punkt m, in welchem sich die Theilungslinien durchschneiden, ist der erwehnte Punkt. Denn, wenn man aus solchem Durchschnitspunkt m zu den übrigen Vielekswinkeln gerade Linien zieht, so wird das ganze Vielek in eben soviele gleiche Dreieke unterschieden, als im Vielek Winkel oder Seiten sind; weil in allen solchen Dreieken zwei Seiten mit den eingeschlossenen Winkeln gleich sind eben so, wie in den zween Dreieken ABm, CBm die Seite AB = BC (§. 112), Bm = Bm, und x = y (weil die ganzen Winkel, eben so gleichen auch ihre Helften einander), folglich mA = mB = mC, u. s. w. (§. 135).

166. Folger. Es kan demnach um jedes regelmässiges Vielek ein Umkreis, der nemlich

durch

durch die Scheitel aller Vieleckswinkel reiche, umgeschrieben werden.

167. Folger. Gegenmässigerweis läßt sich auch jedem Umkreis ein regelmässiges Vielek einschreiben.

168. Folger. Weil die Seiten eines regelmässigen Vieleks in Ansehung des umzuschreibenden Umkreises gleiche Sehnen sind, solche aber alle vom Mittelpunkt gleichweit abstehen (§. 70), so kan einem Umkreis ein regelmässiges Vielek auch umgeschrieben, oder umgekehrt ein Umkreis einem regelmässigen Vielek eingeschrieben werden.

169. Folger. Wenn aus dem mitteren Punkt eines regelmässigen Vieleks zu allen Eken gerade Linien gezogen werden, so theilen sie 1) die Vieleckswinkel in zwei gleiche Theile; 2) sie theilen das Vielek in soviele gleiche und ähnliche gleichschenklichte Dreieke, als im Vielek Seiten sind.

170. Folger. Also auch umgekehrt, wenn die Winkel eines regelmässigen Vieleks durch gerade Linien in zwei gleiche Theile geschnitten werden, so reichen solche Linien durch den mitteren Punkt des Vieleks, das ist, durch den Mittelpunkt des umgeschriebenen Umkreises.

171. Aufg. Einen Umkreis um ein regelmässiges Vielek umzuschreiben.

Auflös. Man theile des gegebenen Vieleks

zwei nächste Winkel A und B (Fig. 50) durch gerade Linien A m und B m in zwei gleiche Theile, der Durchschnitspunkt m bestimmet sowohl den Mittelpunkt als auch den Halbmesser m A des umzuschreibenden Umkreises (§. 165). (Vom Dreiek insbesondere sehe §. 75, 124 Bew.).

172. Folger. Jede Seite eines regelmässigen Vieleks schneidet im Umkreis gleichen Bogen ab (§. 67), und zwar einen bestimmten Bogen von sovielen Graden, als der Theilanzeiger, der aus der Theilung 360° mit der Anzahl der Seiten des Vieleks entstehet, enthält.

173. Folger. Die Seite eines regelmässigen Sechsekes schneidet diesemnach einen Bogen von 60° ab. Eben derowegen gleichet die Seite A B eines regelmässigen Sechsekes dem Halbmesser m A des umgeschriebenen Umkreises. Denn im Dreiek A m B ist m = 60° (§. 172); also o + x = 120° (§. 130), und vermög m A = m B ist o = x = 60°; folglich auch A B = m A (§. 135).

174. Folger. Hieraus läßt sich der Winkel eines regelmässigen Vielekes auf schleinigere Art, als §. 164, folgendermassen bestimmen: Man ziehe den Winkel m, oder die Grade des Bogens A B (§. 25), den die Seite A B des Vielekes abschneidet, von 180° ab; so giebt der Ueberrest den Vielekswinkel. Denn o = x (§. 135), und x = y, weil m B den Winkel A B C in zwei

gleiche

gleiche Theile schneidet (§. 169); folglich $o + x = x + y = ABC$.

175. Aufg. Einem Umkreis ein regelmässiges Dreiek, Vierek, und Sechsek einzuschreiben.

Auflös. Man fasse zwischen die Schenkel eines Zirkels den Halbmesser, und trage ihn am Umkreis (Fig. 51) ringsherum; verbindet man nun 1) jede zween nächste im Umkreis bezeichnete Punkte durch Sehnen, so erhält man das anverlangte Sechsek (§. 173); verbindet man aber 2) nur jeden dritten Punkt A, C, E, so erfolget das Dreiek (§. 67, 68). 3) Um das Vierek einzuschreiben, errichte man zwei gegenmässig senkrechte Durchmesser, und ziehe durch ihre vier Endpunkte Sehnen, so ist das Vierek aufgezeichnet (§. 112).

176. Folger. Durch wiederholte gleiche Entzweiung der Bögen, welche die Seiten eines regelmässigen Vielekes im Umkreis abschneiden, kan ein Vielek stets von doppelt vielen Seiten errichtet werden. So, wenn man den Bogen, welcher von der Seite eines regelmässigen Viereckes abgeschnitten wird, gleichentzweiet, läßt sich ein Achtek, alsdan ein Sechszehnek einschreiben: eben so aus einem Sechsek ein Zwölfek, ein Vierundzwanzigek, u. s. w.

177. Aufg. Einem regelmässigen Vielek einen Umkreis einzuschreiben.

Auflös. Man theile zwei Seiten des gegebenen Vielekes senkrecht in zwei gleiche Theile (§. 43); der gemeinschaftliche Durchschnitspunkt der zwei Theilungslinien bestimmet den Mittelpunkt, und den Halbmesser des einzuschreibenden Umkreises (§. 74).

178. Aufg. Um einen Umkreis ein regelmässiges Vielek umzuschreiben.

Auflös. Man bestimme im gegebenen Umkreis die gehörigen Punkte (A, B, C, D (Fig. 52) es sei ein Vierek umzuschreiben) auf eben solche Art, als wenn das verlangte Vielek einzuschreiben wäre; zu solchen Punkten ziehe man Halbmesser, und errichte aus deren Endpunkten senkrechte Linien oder Berührlinien (§. 94, 95), bis sie sich beiderseits schneiden, so ist das verlangte bewerkstelliget.

IX. Kapitel.

Von Verhältnißgleichungen der Linien

179. Lehrs. Wenn in einem Dreiek ABC (Fig. 53) zu einer Seite BC eine gleichlaufende Linie DE gezogen wird, so schneidet solche Linie die anderen zween Seiten dergestalt, daß die Stüke AD, AE vom Scheitel A gerechnet den ganzen Seiten verhältnißmässig seien; nemlich AB : AD = AC : AE.

Be-

Beweis. Man ziehe die Zwerchlinie DC und EB, so ist △ DEB = △ EDC (§. 160). Giebt man zu beiden diesen einzeln das Dreiek ADE, so ist auch AEB = ADC (§. 31, V.). Nun sowohl AEB und AED, als ADC und ADE besitzen gleiche Höhe, weil ihr Scheitel in einem gemeinschaftlichen Punkt (deren ersteren in E: deren lezteren in D), und die Grundlinie in einer nemlichen Linie liegen (§. 38, 117); folglich bestehet AEB: AED = AB: AD, und ADC: ADE = AC: AE (§. 158); nun die vörderen zwei Verhältnisse sind hier einander gleich (wie es aus Betrachtung solcher Dreieke erhellet), also ist AB: AD = AC: AE (Alg. 264).

180. Folger. Auch die Stücke DB, EC zwischen den gleichlaufenden Linien sind 1) den ganzen Seiten, 2) den Stücken vom Scheitel gerechnet verhältnißmässig. Denn, 1) aus AB: AD = AC: AE bestehet AB — AD: AB = AC — AE: AC (Alg. §. 257. V.), das ist: DB: AB = EC: AC (wie die Bildniß zeiget). 2) Abermal aus AB: AD = AC: AE bestehet AB — AD: AD = AC — AE: AE, das ist: DB: AD = EC: AE.

181. Folger. Wenn diesemnach in einem Dreiek zu einer Seite BC (Fig. 54) wieviel immer gleichlaufende Linien gezogen werden, so sind alle gehörig entzwischende Stücke einander verhältnißmässig, nemlich DF: FB = EG: GC, u. s. w. Denn gemäß §. 180 bestehet DB: EC

= AB: AC, und FB: GC = AB: AC, alſo auch DB: EC = FB: GC (Alg. §. 264), oder DB: FB = EC: GC (Alg. §. 257, II.), alsdan DB — FB: FB = EC — GC: GC (alda V.), das iſt, DF: FB = EG: GC, u. ſ. w.

182. **Folger.** Wenn ſolchemnach umgekehrt eine gerade Linie zwei Seiten eines Dreiekes ſolchergeſtalt ſchneidet, daß die Stücke dererſelben entweder untereinander, oder mit den ganzen Seiten verhältnißmäſſig ſeien, ſo iſt ſie mit der dritten Seite gleichlaufend.

183. **Aufg.** Eine gerade Linie AB (Fig. 54) in ſoviele Stücke, als eine andere gegebne AC enthält, verhältnißmäſſig zuſchneiden.

Auflöſ. Man füge die zwei gegebnen Linien AB, AC unter welch immer einem Winkel A zuſam, verbinde ihre Endpunkte B und C durch eine gerade BC, und ziehe zu dieſer durch die Theilungspunkte E, G (u. ſ. w.) gleichlaufende Linien ED, GF; dieſe ſchneiden die gegebne AB in die verlangten Theile. Denn AD: AE = DF: EG = FB: GC (§. 181).

184. **Lehrſ.** Wenn in einem Dreiek ABC (Fig. 55) eine gerade Linie AD einen Winkel A in zwei gleiche Theile ſchneidet, ſo ſchneidet ſie zugleich die entſprechende Seite BC in zwei Stücke BD, DC, die mit den anderen zween anliegenden Seiten eine Verhältnißgleichung BD: DC = BA: AC beſtellen.

Beweis. Man verlängere die Seite BA

gegen E, bis AE = AC, alsdan ziehe man EC, so ist AD im △ EBC mit EC gleichlaufend vermög x = m, denn der Winkel BAC = m + n (§. 142), oder, weil m = n (§. 135), BAC = 2m, und ½ BAC = m (§. 31. VI.), das ist, x = m. Dannenhero BD : DC = BA : AE oder (gleiches für gleiches) AC (§. 180).

185. Lehrs. In ähnlichen Dreieken ABC, abc (Fig. 42) sind die einander entsprechenden Seiten verhältnißmässig.

Beweis. Wenn das Dreiek abc auf ABC gemäß einem entsprechenden Winkel gehörig geleget wird, ist die dritte Seite bc mit BC gleichlaufend (§. 143); also AB : Ab = AC : Ac; nun Ab = ab, und Ac = ac, folglich AB : ab = AC : ac. Eben so bestehet auch AB : ab = BC : bc, wie nicht minder BC : bc = AC : ac.

186. Folger. Wenn demnach umgekehrt in zween Dreieken die Seiten an einem gleichen Winkel verhältnißmässig sind, so sind solche Dreieke einander ähnlich.

187. Aufg. Zu drei gegebnen geraden Linien AB, AC, AD (Fig. 56) die dritte verhältnißmässige zubestimmen.

Auflös. Man füge welch immer zwei unbegrenzte gerade Linien unter welch immer einem

Win-

Winkel A zusammen, und trage in den einen Schenkel die zwei ersteren der gegebenen Linien AB, AC ein: in den anderen aber die dritte AD; man verbinde dan die Endpunkte B, und D mittelst BD, und ziehe durch C zu BD die gleichlaufende CE, so ist AE die gesuchte.

Beweis. Denn, weil BD mit CE gleichlaufend ist, sind die △ ABD und ACE ähnlich (§. 144); folglich AB : AC = AD : AE.

188. Folger. Aehnlichergestalt kan auch zu zweien die dritte gerade verhältnißmässige Linie gefunden werden, wenn man die zweite, nachdeme sie schon in den einen Schenkel eingetragen worden, auch in den anderen einträgt, uud übrigens, wie vorhero, verfährt.

189. Aufg. Eine gerade Linie MN (Fig. 57) in wieviel immer gleiche Theile z. B. in dreie zutheilen.

Auflös. Man bestimme in welch immer einer geraden Linie AB drei gleiche Theile, und errichte darauf ein gleichseitiges Dreiek CAB (aus A und B mit dem Halbmesser AB in C zwei sich durchschneidende Bögen beschreibend, und den Durchschnitspunkt C mit B und A verbindend). Ferner trage man die gegebne Linie MN in die Schenkel CA und CB ein, und durch die Punkte D und E, wohin sie aus C reichet, ziehe man die gerade DE, so ist das △ CDE gleichschenklicht, und vermöge des gemeinschaftlichen Winkels C dem △ CAB

ähn-

ähnlich (§. 139), folglich der Winkel CDE = A, und CED = B; aber A = B = C (§. 135), also ist auch im △ CDE der Winkel D = E = C, folglich ist auch das △ CDE gleichseitig, und dannenhero DE = DC = MN. Man ziehe nun aus C zu F, und G gerade Linien, so sind die △ CFA, und △ CxD vermöge des gemeinschaftlichen Winkels C und D = A ähnlich (§. 120, 132), und derowegen AF: AC = Dx: DC (§. 185); aber AF = $\frac{1}{3}$ *A*B = $\frac{1}{3}$ *A*C (vermöge der Zubereitung), also auch Dx = $\frac{1}{3}$ DE = $\frac{1}{3}$ DC = $\frac{1}{3}$ MN. Eben so in den ähnlichen △ CG*A*, CyD ist *AG*: *AC* = Dy: DC; aber *AG* = $\frac{2}{3}$ *AB* = $\frac{2}{3}$ AC, also auch Dy = $\frac{2}{3}$ DE = $\frac{2}{3}$ DC = $\frac{2}{3}$ MN, u. s. w.

Anmerk. Auf ähnliche Art kan eine gegebne Linie in eben soviele Stücke getheilet werden, als eine andere gegebne schon getheilet ist.

190. **Erklär.** Die größte Seite im rechtwinklichten Dreiek, die sonst **Hipotenuse** (hypotenusa) (vom Pithagoras) genennet wird, kan man (nicht ohne besonderem Vortheil einer Verkürzung besonders in der ausübenden Mathematik) im Teutschen **Großseite**: die übrigen zwei kleineren aber die **Minderseiten**, sonst Katheten (catheti) benamen.

191. **Lehrs.** Wenn in einem rechtwinklichten Dreiek *ABC* (Fig. 58) aus dem rechten Winkel *A* auf die Großseite eine senkrechte Linie *AD* gezogen wird, so ist sie die mitlere verhältnißmässige zwischen den Stücken BD, DC der Großseite, nemlich BD: *AD* = *AD*: DC.

Beweis. Die senkrechte Linie *AD* theilet das rechtwinklichte Dreiek *ABC* in zwei ähnliche Dreieke *ADB*, und *ADC*. Denn die Dreieke *ADB* und *ACB* sind vermöge der rechten Winkel *ADB*, *BAC* nebst dem gemeinschaftlichen B einander ähnlich (§. 132): eben so sind die Dreieke *ADC* und *ABC* vermöge der rechten Winkel *ADC*, *BAC* nebst dem gemeinschaftlichen C einander ähnlich, also sind auch die Dreieke *ADB* und *ADC* einander ähnlich (§. 31. III). Derohalben BD : *AD* = *AD*: DC.

192. Folger. Wenn demnach aus welch immer einem Punkt *A* (Fig. 59) des Umkreises auf den Halbmesser eine senkrechte Linie *AD* herabgelassen wird, so ist sie die mitlere verhältnißmässige zwischen den Stücken *BD*, *DC* des Durchmessers. Denn, wenn man solchen Punkt *A* mit den Endpunkten des Durchmessers durch Sehnen *AB*, AC verbindet, so entstehet ein rechtwinklichtes Dreiek (§. 92), und der vorige Lehrsatz (§. 191).

193. Aufg. Zwischen zween geraden Linien FG und HK (Fig. 59) die mitlere verhältnißmässige zufinden.

Auflös. Man füge die zwei gegebnen FG, HK in eine gerade Linie BC, und beschreibe auf ihr als auf einem Durchmesser aus ihrem Mittelpunkt M einen halben Umkreis, alsdan errichte man aus dem Zusammenfügungspunkt D eine senkrechte Linie, bis sie an den Umkreis trefe; solche ist die verlangte (§. 192).

194. Lehrs. Wenn aus einem Punkt *A* (Fig. 60) ausser dem Umkreis eine Berührlinie *AC*, und eine Schneidlinie *AB* auf den Umkreis gezogen werden, so ist die Berührlinie die mittlere verhältnißmässige zwischen der ganzen Schneidlinie, und dem äusseren Stük, nemlich *AB* : *AC* = *AC*: *AD*.

Beweis. Man ziehe die Sehnen CD, CB, so sind die Dreieke *ACD*, *ACB* ähnlich, weil nebst dem gemeinschaftlichen *A* die Winkel *ACD* (§. 89), und *CBA* (§. 90) wegen gleichem Maß ½ CD gleich sind, weßwegen *AB*: *AC* = *AC*: *AD* (§. 185).

195. Lehrs. Wenn aus einem Punkt *A* (Fig. 61) zwei Schneidlinien *AB*, *AC* zum Umkreis gezogen werden, so sind die äusseren Stüke *AD*, *AE*, verkehrt genommen, den ganzen Schneidlinien verhältnißmässig, nemlich *AB*: *AC* = *AE*: *AD*.

Beweis. Man ziehe die Sehnen *BE*, *DC*, so sind die Dreieke *AEB*, *ADC* vermög B = C (§. 93), und *A* = *A* einander ähnlich, folglich *AB*: *AC* = *AE*: *AD* (185).

196. Lehrs. Die Stüke zwoer sich durchschneidenden Sehnen bestellen verkehrt genommen eine Verhältnißgleichung *AE*: *CE* = *ED*: *EB* (Fig. 62).

Beweis. Man ziehe die Sehnen *AD*, *CB*, so

so sind die Dreieke AED und CEB vermöge der Scheitelwinkel in E (§. 54), und $A = C$ (§. 93) einander ähnlich, weßwegen $AE : CE = ED : EB$ (§. 185).

197. Erklär. Eine Linie in der mitleren und äussersten Verhältniß schneiden heißt sie in zwei ungleiche Stüke dergestalt schneiden, daß das grössere Stük zwischen der ganzen Linie, und dem kleineren Stük die mitlere verhältnißmässige sei. Man hieß sonsten solchen Schnit den göttlichen Schnit (sectio divina) vermöge des vortreflichen Vortheils, den die Mathematik daraus schöpfte.

198. Aufg. Eine gerade Linie AB (Fig. 63) in der mitleren, und äussersten Verhältniß schneiden.

Auflös. Man errichte aus dem Endpunkt B die senkrechte Linie BM, welche der Helfte der gegebnen Linie AB gleich sei, alsdan beschreibe man aus M mit dem Halbmesser MB den Umkreis $BDCB$, so ist BA eine Berührlinie (§. 86). Ferner ziehe man aus dem anderen Endpunkt A durch den Mittelpunkt M die Schneidlinie AC, und trage ihr äusseres Stük AD in AB ein, damit $AE = AD$; so ist AB in E gemäß dem Verlangen geschnitten, weßwegen $AB : AE = AE : ED$.

Beweis. Vermöge der Zubereitung bestehet $AC : AB = AB : AD$ (§. 194), also auch

AC

$AC - AB : AB = AB - AD : AD$ (Alg. §. 257. V.), das ist, AD : AB = EB : AD (denn BM = $\frac{1}{2}$ AB, folglich AB = 2 BM oder DC), alsdan gleiches AE anstat AD ist AE : AB = EB : AE, woraus (die äusseren Glieder mit denen mitleren versetzend) AB : AE = AE : EB.

199. Lehrs. Wenn in einem gleichschenklichten Dreiek ABC (Fig. 64), in welchem jeder Winkel B, C, an der Grundlinie BC zweimal so groß ist, als jener A am Scheitel, eine gerade Linie CD einen Winkel C an der Grundlinie in zwei gleiche Theile schneidet, so schneidet sie zugleich die entsprechende Seite AB in der mitleren und äussersten Verhältniß, nemlich BD : AD = AD : AB.

Beweis. Denn es bestehet BD : AD = BC : AC (§. 184); nun AC = AB (als gleiche Schenkel), und BC = AD, also (gleiches für gleiches) BD : AD = AD : AB. Daß BC = AD, wird hiedurch berichtiget: im △ ABC ist gemäß dessen Eigenschaft der Winkel A = 36°, B = 72°, C = 72° (§. 124), und, weil C durch CD in zwei gleiche Theile geschnitten wird, ist der Winkel BCD = DCA = 36° = A, dannenhero auch der Winkel BDC = 72° (§. 124), folglich BC = DC = AD (§. 135).

200. Aufg. Ein gleichschenklichtes Dreiek ABC (Fig. 64) mit diesem Beding aufzurichten,

daß jeder Winkel B und C an der Grundlinie zweimal so groß sei, als jener am Scheitel A ist.

Auflöſ. Man schneide den gegebnen oder willkürlichen Schenkel AB in der mitleren und äussersten Verhältniß (§. 198), und mit dem grösseren Stük AD als einem Halbmesser bezeichne man aus B und D in C Bögen, deren Durchschnit C man mit B und A durch gerade Linien verbinde, so ist das anverlangte Dreiek aufgerichtet.

Beweis. Vermög der Zubereitung ist AB : AD = AD : DB (§. 198), oder weil AD = DC = BC, ist AB : BC : DC : DB (§. 31. II.), also sind die △ ABC, △ DCB wegen den verhältnißmässigen Seiten um den gemeinschaftlichen Winkel B einander ähnlich (§. 186); folglich DCB = A, und BDC = BCA (§. 134); aber DBC = BDC (§. 135), und BDC = A + DCA (§. 142) = 2 A (§. 135), also ist im △ ABC sowohl B, als C = 2 A, und derowegen AB = *AC*.

Anmerk. Wenn die Grundlinie BC angegeben würde, worauf ein derlei Dreiek aufzustellen wäre, so schneide man die Grundlinie in der erwehnten Verhältniß, und zeichne zuvor das Dreiek BDC, alsdan verlängere man die Seite BD gegen *A*, und trage BC in *DA* ein; zieht man nun die gerade Linie *AC*, so hat man das verlangte Dreiek.

201. Aufg. Einem Umkreis ein regelmässi-

ges

ges 1) Zehnek, 2) Fünfek einzuschreiben.

Auflös. Man schneide den Halbmesser *AB* (Fig. 65) des Umkreises in der mitleren und äussersten Verhältniß; das grössere Stük AD ist die Seite des regelmässigen Zehneks. Wenn man es also an dem Umkreis herumträgt, und durch die nächsten Punkte gerade Linien zieht, so erhält man das verlangte Zehnek; läßt man aber überall einen Zwischenpunkt hinweg; das Fünfek.

Beweis. Wenn man gemäß §. 200 ein gleichschenklichtes Dreiek, dessen Schenkel der Halbmesser sei, entwirft, so enthält der Winkel am Scheitel *A*, folglich auch dessen Bogen *BC*, den das grössere Stük des in erwehnter Verhältniß getheilten Halbmessers abschneidet, 36°, wie es aus der Eigenschaft solches Dreiekes erhellet (§. 199 Beweis); nun eben soviele Grade schneidet auch die Seite des regelmässigen Zehneks ab (§. 172), also.

202. Aufg. Ein regelmässiges Vielek, dessen Seite *AB* (Fig. 66) angegeben wird, 1) Meßkünstlerisch, 2) mittelst des Winkelübertragers aufzuzeichnen.

Auflös. 1) Wenn man mit der gegebnen Seite aus ihren Endpunkten *A* und *B* obenher zwei sich in *M* durchschneidende Bögen beschreibet, und dan durch *M* auf *A* und *B* gerade Linien zieht, so erhält man ein gleichseitiges Dreiek *ABM*.

Errichtet man aus *A* und *B* zweie der gegebnen Seite gleiche senkrechte Linien *AC*, *BD*, und verbindet man *C* und *D* durch *CD*, so erfolget ein regelmässiges Vierek (§. 112, 146).

Um ein regelmässiges Sechsek zubeschreiben, errichte man zuvörderst ein gleichseitiges Dreiek, (wie erst geschehen), aus dessen Scheitel mit dem Halbmesser *MA* = *AB* bezeichne man einen Umkreis, und trage in solchen die gegebne Seite ein (§. 173).

Für die übrigen dienet folgende Zeichnungsart: Man beschreibe in einem willkührlichen Umkreis ein regelmässiges Vielek a b c d e (Fig. 67). von jener Gattung, als verlanget wird, so sind die Dreieke a m b, *AMB* in dem beschriebenen, und zubeschreibenden Vielek (welches man sich indessen auch als in einem Umkreis schon beschrieben vorbildet) einander ähnlich (§. 139, 169); folglich ist ab : am = *AB* : *AM* (§. 185), hieraus wird das vierte Glied, oder der Halbmesser AM des jenen Umkreises bestimmet (Allg. §. 255), in welchem die gegebne Seite genau eben so oft neben sich angesetzet werden kan, als das verlangte Vielek Seiten enthält. Man bezeichne nun mit AM aus A und B obenher zwei sich durchschneidende Bögen, aus derer Durchschnitspunkt M beschreibe man einen Umkreis *A*BCDE, und trage die gegebne Seite ein. Aber auf diese Art können nur jene regelmässige Vieleke auf einer gegebnen Seite errichtet werden, welche dem Umkreis Meßkünstlerisch eingeschrieben können werden.

Dero

Derowegen

2) Die übrigen werden mittelst des Winkelübertragers folgendermassen bewerkstelliget: Man zeichne an beiden Endpunkten A und B der gegebnen Seite (Fig. 68) einen Winkel auf, der die Helfte des Vielekswinkels betrage, und aus dem Punkt M, wo sich die Schenkel solcher Winkel schneiden (§. 170), beschreibe man einen Umkreis; in diesem kan die gegebne Seite verlangtermalen angesetzet werden.

Anmerk. Den Gebrauch des Winkelübertragers (transportatorium) den Anfängern hierinnen deutlich darzustellen, wird nicht überflüssig sein. Nemlich man bestimme zuvörderst den Vielekswinkel gemäß §. 174, nachher lege man den Winkelübertrager dergestalt an die gegebne Seite AB, daß dessen Durchmesser genau an die gegebne Seite, der Mittelpunkt aber auf den Endpunkt A trefe, sodan zehle man im Umkreis des Winkelübertragers halb soviele Grade vom Anfang E bis D (den Punkt D durch ein Düpflein bezeichnend), als der Winkel des verlangten Vielekes enthält, eben solches geschehe auch am anderen Endpunkt B; zieht man nun aus A und B durch D und F gerade Linien, so schneiden sie sich im Mittelpunkt M (§. 170), aus welchem man mit dem Halbmesser MA den Umkreis zubeschreiben, und die gegebne Seite darin anzubringen hat, so ist das Vielek gezeichnet.

203. Lehrs. Die Umfänge ähnlicher Vieleke ABCDE und abcde (Fig. 67) verhalten

sich gegeneinander eben so, als jede zwei einander entsprechende Seiten.

Beweis. Vermöge der Aehnlichkeit der Vieleke ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea (§. 114), also verhält sich auch die Summe der vorhergehenden Glieder AB + BC + CD + DE + EA oder der Umfang des grösseren Vieleks zu der Summe der nachfolgenden ab + bc + cd + de + ea oder Umfang des kleineren, wie AB : ab, oder BC : bc, u. s. w. (Alg. §. 270).

204. Lehrs. Die Umfänge ähnlicher Vieleke verhalten sich auch wie jede zwei einander entsprechende Zwerchlinien, die aus gleichen Winkeln zu denen übrigen gezogen sind.

Beweis. Man nenne den Umfang des einen Vielekes U, und des anderen u, so ist (Fig. 69) U : u = AB : ab (§. 203); nun vermöge der Aehnlichkeit der △ ADB, △ adb ist AB : ab = AD : ad, oder = BD : bd (§. 185), also auch U : u = AD : ad, oder = BD : bd. Daß die △ ADB, △ adb einander ähnlich sind, wird folgendermassen erwiesen: Vermöge der Aehnlichkeit der Vieleke ist EA : ea = ED : ed (§. 114), also wegen E = e sind die △ EDA, △ eda ähnlich (§. 186), folglich der Winkel EDA = eda, EAD = ead, und derowegen auch DAB = dab (§. 31. V.). Ferner ist EA : ea = AD : ad (§. 185), und EA : ea = AB : ab (§. 114), also auch AD : ad =

AB :

AB : ab, folglich sind die △ ADB, △ adb ähnlich (§. 186)); u. s. w.

205. Folger. Wenn demnach in ähnlichen Vieleken Zwerchlinien DA, DB, da, db aus gleichen einander entsprechenden Winkeln D = d, zu denen anderen gezogen werden, so werden die Vieleke (man verstehe dies auch von von Viereken) in gleichviele ähnliche Dreieke getheilet, wie es aus dem vorhergehenden Beweis erhellet.

206. Folger. Dannenhero umgekehrt jene Vieleke, welche durch Zwerchlinien in gleichviele ähnliche Dreieke getheilet werden, sind einander ähnlich. Denn die Winkel des einen Vieleks sind den Winkeln des anderen ordentlich gleich, und die angehörigen Seiten verhältnißmässig (§. 114), wie es sich aus den diesfälligen Verhältnißgleichungen ergiebt.

207. Folger Alle regelmässige Vieleke einerlei Gattung sind einander ähnlich.

208. Folger. Wenn aus zween ungleichen ähnlichen Vieleken das eine auf das andere gemäß gleichem Winkel und zween entsprechenden Seiten geleget wird, so sind die übrigen Seiten einander gleichlaufend, wie es erhellet, sobald man (Fig. 70) die gehörigen Zwerchlinien zieht (§. 143).

209. Aufg. Einem gegebnen Vielek AB CDEF (Fig. 70) ein ähnliches zuentwerfen.

Auflös. Man trage nach gezogenen Zwerchlinien die angegebne, oder beliebig angenommene Seite Ab in die entsprechende Seite AB ein, welche man verlängere, soferne sie kleiner als jene des verlangten Vieleks wäre, durch b ziehe man zu BC die gleichlaufende bc, durch c zu CD die gleichlaufende cd, durch d die de, durch e die ef, so ist das verlangte Vielek entworfen (208).

210. Lehrs. Die Umfänge der regelmässigen ähnlichen Vieleke verhalten sich gegeneinander gleichwie die Halbmesser der umgeschriebenen Umkreise.

Beweis. Wenn man die Umfänge zwoer derlei Vieleke durch U und u vorstellet, so ist (Fig. 67) U : u = AB : ab (§. 203); nun vermög der Aehnlichkeit der △ ABM, △ abm (§. 169) bestehet AB : ab = AM : am (§. 185), aslo U : u = AM : am.

211. Folger. Die Zirkelumkreise verhalten sich demnach eben so, als ihre Halbmesser, oder Durchmesser (Alg. §. 225). Denn man kan sich den Zirkelkreis füglich als ein regelmässiges Vielek von ohnendlich vielen ohnendlich kleinen und derowegen gleichen Seiten vorbilden, folglich sind alle Zirkelkreise regelmässige einander ähnliche Vieleke.

212. Folger. Also verhalten sich auch die Halbumkreise, die Viertelumkreise und überhaupt alle ähnliche Bögen, die nemlich in Beziehung auf ihre Umkreise gleichviele Grade enthalten, wie

ihre

ihre Halbmesser. Denn, wenn man zwei Umkreise durch U und u, und deren Halbmesser durch H und h darstellet, bestehet U: u = H: h (§. 211), sodan $\frac{1}{2}$ U: $\frac{1}{2}$ u = H: h, oder $\frac{1}{4}$ U: $\frac{1}{4}$ u = H: h, u. s. w. (Alg. §. 125).

213. Folger. Wenn diesemnach ein Durchmesser, und dessen Umkreis, massen dieser in eine gerade gleiche Linie verwandlet ist, das ist: Wenn die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis bekant ist, und dan welch immer ein Durchmesser angegeben wird, so kan dessen Umkreis ohne Anstand in einer gleichgeltenden geraden Linie, und umgekehrt aus dem Umkreis der Durchmesser gefunden werden (Alg. §. 255). Aber solche Verhältniß nach der Mathematischen Schärfe zubestimmen ist eine ungehobene Schwürigkeit. Doch haben sich mehrere gelehrte Männer bestrebet durch Näherung zu solchen Verhältnissen zugelangen, welche man im gemeinen Gebrauch bei Umkreisen von mässigen Halbmessern ohne merklichen Fehler annehmen kan. Gemäß Archimed verhält sich überhaupt der Durchmesser zum Umkreis, wie 7: 22. Aus der Berechnung Ludophls von Cölln (Ceulen) folget solche Verhältniß, wie 100: 314. Metius darbietet 113: 355.

Es sei z. B. ein Durchmesser, dessen Umkreis x man zuwissen verlanget, = 14', so ist 7: 22 = 14: x, sodan 7x = 22 × 14 = 308, und x = $\frac{308}{7}$ = 44' (Alg. 255).

II. Abschnit.

Von Flächen.

I. Kapitel.

Von dem Inhalt und einigen Verwandlungen der Flächen.

214. Lehrs. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 71), wassen sie nicht in einer geraden Linie liegen, kan nur eine einzige gerade Fläche gezogen werden.

Beweis. Man ziehe aus A gerade Linien durch B und C, alsdan stelle man sich vor, daß sich die Linie AB (wie immer verlängert), massen ihr Endpunkt B veste beharret, von A nach C gemäß der Richtung AC bewege, so entstehet eine gerade Fläche (§. 12), welche durch die drei Punkte reichet. Ferner wie oft immer sich eine gerade durch AB reichende Linie erwehntermassen aus A durch C in eben dieser Richtung AC beweget, so entsteht jederzeit eine gerade Fläche, welche mit der vorigen übereinfällt, und damit nur eine einzige ausmacht.

215. Folger. Diesemnach können sich zwei gerade Flächen (als Flächen) in dreien Punkten nicht

nicht berühren ohne überein zufallen. Weßtwegen drei der Lage nach gegebne Punkte, massen sie sich nicht in einer geraden Linie befinden, die Lage und Richtung einer geraden Fläche bestimmen.

Anmerk. Hieraus erhellet die Ursach: warum ein Dreifuß, als dreifüßiger Tisch, Stuhl, u. d. gl. jederzeit und überall auf einen Fußboden veste (obschon nicht allzeit wagrecht) aufstehe, was bei mehrfüssigen nicht allzeit besteht; indeme wohl durch drei, nicht aber auch allzeit durch vier oder mehrere gegebne Punkte eine ebene Fläche reichet.

216. Erklär. Was von Vieleken im Betref der Regelmässigkeit, Aehnlichkeit, und Gleichheit, u. d. gl. (VI. Kap.) gemeldet ist worden, ist auch von Flächen zuverstehen, indeme die Vieleke eigentlich Flächen sind, und in ihnen nach Erheischung manigfältiger Umstände nur Linien und Eke oder Winkel zur Betrachtung gezogen werden. Nach Verschiedenheit der Bewegung der Erzeuglinie entstehen verschiedene sowohl gerade als krumme Flächen (§. 12). Von dem Flächeninhalt des gleichlaufenden Viereckes und des Dreiekes ist schon oben (§. 155 und folgend.) gehandelt worden, weßtwegen hier unsere Aufmerksamkeit nur auf die übrigen Flächen gerichtet ist.

217. Erklär. Gleichwie die unbekanten Linien durch eine bekante Linie, eben so werden die unbekanten Flächen durch eine bekante Fläche untersuchet. Das schicklichste Maß der Flächen ist vermöge der allfälligen Bestimtheit das regelmässige

Viereck

Vierek (§. 146); namentlich die gleichseitig-rechtekigte Klafter, welche wir der Kürze halber ohne Beisatz rechtekigte oder Flächenkafter, sonst Quadrat Klafter (hexapeda quadrata) nennen, nemlich eine solche rechtekigte Fläche, wovon sowohl die Länge als die Breite eine Klafter ist: sodan ein rechtekigter Schuh oder Flächenschuh, (pes quadratus): ein rechtekigter Zoll (pollex quadratus): rechtekigter Strich (linea quadrata) u. s. w. Derlei sind auch die rechtekigten Meilen, Flächenmeilen (miliaria quadrata).

Anmerk. Nicht unfüglich dürfte im Teutschen die rechtekigte Klafter gevierte Klafter, sodan gevierter Schuh, gevierter Zoll, Strich u. s. w. gevierte Meilen u. s. w. von vieren (quadrare) benennet werden, indeme man sich ohnehin dieses Ausdrukes: ins gevierte, wodurch man die Seite oder Ausdehnung eines gleichseitigen Rechtekes in die Länge und in die Breite versteht, bedienet. Man hat aber eine benante aus mehreren Einheiten bestehende gevierte Ausdehnung von der Ausdehnung ins gevierte wohl zuunterscheiden. Durch den ersteren Ausdruk wird alsogleich der bestimte Inhalt einer Fläche: durch den anderen aber nur die Seite einer gleichseitigen rechtekigten Fläche oder Rechtekes angedeutet. So 100 gevierte Klafter deuten eine Fläche an, welche solche 100 Klafter enthält: durch 100 Klafter ins gevierte aber versteht man eine Fläche, welche 100 Klafter in die Länge und in die Breite, das ist, 100 mal 100, folglich 10000 derlei rechtekigte oder gevierte

te Klafter enthält: u. s. w (Alg. §. 133). Das Zeichen des Flächenmasses ist ein kleines regelmässiges Vierekgen □, massen es nebst den gewöhnlichen Zeichen des Längenmasses obenher rechts beigefüget wird, als 3□° 5□': 3 rechtekigte Klafter, 5 derlei Schuhe u. s. w.

218. Lehrs. Der Flächeninhalt eines Vierekes, dessen zwei Seiten AB, CD (Fig. 72) einander gleichlaufend sind, gleichet dem Erzeugniß aus der halben Summe der zwei gleichlaufenden Seiten, und aus derer Abstand AE.

Beweis. Wenn man die Zwerchlinie AD zieht, gleichet das Vierek ABDC den zween △ ADB, △ ADC; nun das △ ADB $= \frac{1}{2}$ AB × DF (§. 157) oder (weil DF = AE §. 56) $= \frac{1}{2}$ AB × AE, und △ADC $= \frac{1}{2}$ CD × AE; folglich ABDC $= \frac{1}{2}$ AB × AE + $\frac{1}{2}$ CD × AE = ($\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ CD) × AE.

219. Folger. Die Fläche eines Vierekes, dessen alle Seiten ungleichlaufend sind, wird erhalten, massen man die zwei Dreieke, in welche dasselbige durch die Zwerchlinie getheilet wird, insbesondere berechnet.

220. Lehrs. Die Fläche eines jeden regelmässigen Vielekes gleichet dem Erzeugniß aus dem halben Umfang, und aus der senkrechten Linie, welche aus dem mitleren Punkt des Vieleks auf welch immer eine Seite desselbigen gezogen wird.

Be-

Beweis. Das Vielek wird in soviele gleiche gleich hohe Dreieke, als es Seiten enthält, getheilet (§. 169. N. 2); weil also jedes Dreiek dem Erzeugniß aus der halben Grundlinie, und aus der Höhe gleichet (§. 157), so gleichen alle solche Dreieke dem Erzeugniß aus dem halben Umfang des regelmässigen Vielekes, und aus ihrer gemeinschaftlichen Höhe, oder aus der erwehnten senkrechten Linie (§. 117), folglich gleichet auch das Vielek solchem Erzeugniß.

221. Folger. Um den Flächeninhalt eines jeden anderen unregelmässigen Vielekes zubestimmen, ist nothwendig 1) das Vielek durch Zwerchlinien in Dreieke zutheilen, 2) diese insbesondere zuberechnen, und 3) sie in eine Summe zusamzugeben.

222. Lehrs. Die Kreisfläche gleichet dem Erzeugniß aus dem Halbumkreis und Halbmesser.

Beweis. Der Kreis ist auch ein regelmässiges Vielek (§. 211), in welchem der Halbmesser mit der senkrechten aus dem Mittelpunkt zum Umkreis gezogenen Linie übereinkömt, also wie §. 220, so hier.

223. Folger. Die Kreisfläche gleichet demnach auch dem Erzeugniß aus dem ganzen Umkreis und halben Halbmesser oder vierten Theil des Durchmessers.

224. Aufg. Die Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser gegeben ist, zubestimmen.

Auflös. Man suche den Umkreis des gegebnen Durchmessers in einer geraden Linie mittelst einer angehörigen allgemeinen Verhältniß (§. 213), und vielfältige die Helfte des gefundenen Umkreises mit dem halben Durchmesser; das Erzeugniß davon ist die anverlangte Kreisfläche (§. 222) z. B. der Durchmesser sei = 200', der gesuchte Umkreis in gerader Linie sei = x, so bestehet 100: 314 = 200': x (§. 213), und dan x = 628' (Alg. §. 255), die Helfte hievon ist = 314', des gegebnen Durchmessers Helfte = 100', folglich des Kreises Flächeninhalt ist = 314' × 100' = 31400□'.

225. Folger. Wenn demnach der Raum abcd (Fig 73) zwischen den Umkreisen zwoer Kreise, deren sich der eine in dem anderen befindet, zubestimmen ist, müssen die Flächen beider Kreise insbesondere berechnet, und dan die Fläche des kleineren von jener des grösseren abgezogen werden.

226. Folger. Aus der bestimten Fläche eines Kreises läßt sich auch die Fläche eines jeden Kreisausschnits desselbigen bestimmen, soferne die Anzahl der Grade des Ausschnitsbogens bekant ist. Denn solchergestalt verhält sich der ganze Umkreis oder 360° zu dem bekanten Ausschnitsbogen, gleichwie die bestimte Kreisfläche zu der gesuchten Ausschnitsfläche, welche letzte aus den

dreien

dreien bekanten verhältnißmässigen Grössen alsogleich bekant wird (Alg. 255).

227. Folger. Wenn man demnach das Dreiek ABM (Fig. 74), welches von den zween Halbmessern, und von der Ausschnitssehne gebildet wird, insbesondere berechnet, und von der bestimten Ausschnitsfläche ACBMA abzieht, so giebt der Rest die Kreisabschnitsfläche ACBA.

228. Folger. Gleichmässigergestalt kan man welch immer einen Theil DEFGD oder FGHF der Kreisfläche bestimmen, wenn man beiderseits die Abschnitte berechnet, und sie von der ganzen Kreisfläche abzieht.

229. Aufg. Jedes geradlinichtes Vielek AB CDEA (Fig. 75) in ein Dreiek von gleichem Flächeninhalt zuverwandlen.

Auflöss. Man schneide welch immer ein Ek A mittelst einer durch die zween nächst entgegengesetzte Winkel gezogenen Zwerchlinie EB ab, und führe durch das abgeschnittene Ek *A* eine mit EB gleichlaufende Linie *AF*, die mit der verlängerten Seite CB in F zusamstosse, alsdan ziehe man in dem hiedurch entstandenen Vierek EBFA die Zwerchlinie EF, so sind die Dreieke ABE, und FEB, welche sich auf der gemeinschaftlichen Grundlinie EB zwischen den gleichlaufenden EB, AF befinden, einander gleich (§. 160). Wenn man nun in dem gegebnen Vielek ABCDEA das Dreiek ABE hinwegnimt, und anstat dessen

das

das gleiche △ FEB hinzugiebt, so wird das gegebne Vielek in ein neues und gleiches EFC DE, welches um eine Seite weniger enthält, verwandlet (S. 31. II.). Gleichergestalt schneide man ferner welch immer ein Ek F durch die Zwerchlinie EC ab, und ziehe durch F zu EC die gleichlaufende FG, welche mit der verlängerten Seite DC in G zusamstosse; alsdan ziehe man die Zwerchlinie EG, so sind die △ FCE △ CEG einander gleich (§. 160). Wenn man nun in dem Vielek EFCDE das △ FCE hinwegnimt, und stat dessen das gleiche △ CEG hinzugiebt, so wird das Vielek EFCDE in das gleiche Dreiek EGD verwandlet (so von denen übrigen).

230. Aufg. 1) Ein länglichtes Rechtek, 2) ein Dreiek, 3) welch immer ein anderes geradlinichtes Vielek, 4) einen Kreis in ein gleichseitiges Rechtek von gleichen Flächeninhalt zuverwandlen.

Auflös. 1) Man suche zwischen der Höhe und Grundlinie des länglichten Rechtekes die mitlere verhältnißmässige Linie; diese ist die Seite des verlangten gleichseitigen Viereke. 2) Eben so suche man zwischen der Höhe und halben Grundlinie des Dreiekes die mitlere verhältnißmässige. 3) Das geradlinichte Vielek verwandle man ehe in ein Dreiek (§. 229), und suche dan, wie vorher, die mitlere verhältnißmässige. 4) Auch zwischen dem Halbmesser und Halbumkreis suche man die mitlere verhältnißmässige Linie. Errichtet man nun auf der solchergestalt bestimmten Seite ein

regelmässiges Vierek (wie §. 202), so gleichet dessen Flächeninhalt denen gegebnen.

Beweis. 1) Es sei des Vierekes Höhe = h, die Grundlinie = g, die mitlere verhältnißmässige = m, so bestehet h : m = m : g, woraus g h = m^2 (Allg. §. 252); nun g h ist die Fläche des gegebnen Vierekes (§. 156), und m^2 ist die Würde zweiten Grades von m, oder das gleichseitige Rechtek, dessen Seite die mitlere verhältnißmässige zwischen der Höhe und Grundlinie ist. 2) Für das Dreiek bestehet h : m = m : $\frac{1}{2}$ g, hieraus $\frac{1}{2}$ g h = m^2; nun $\frac{1}{2}$ g h gleichet dem Flächeninhalt des Dreieckes (§. 157), also auch m^2. 3) Wie vorher. 4) Der Halbmesser sei = h, der Halbumkreis = $\frac{1}{2}$ u, die mitlere verhältnißmässige = m, so ist h : m = m : $\frac{1}{2}$ u, und $\frac{1}{2}$ h u = m^2.

Anmerk. Es verstehet sich von selbst, daß, nachdem der Halbumkreis in einer geraden gleichgeltenden Linie schon bestimmet worden, zwischen dieser und dem Halbmesser die mitlere verhältnißmässige zusuchen sei. Ferner erhellet, daß, weil die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis (§. 213), mittelst welcher solche gerade Linie bestimmet zuwerden kommet, der Mathematischen Schärfe vollkommentlich nicht entspricht, auch das auf erwehnte Art zubestimmende gleichseitige Rechtek der Kreisfläche nicht genau gleich sei, obwohlen man es im gemeinen Gebrauch vermöge des unbedeutenden Mangels gleichsam vollkommen ansehen kan.

II. Kapitel.

Von Vergleichungen der Flächen.

231. Lehr. Die Flächen der Dreieke verhalten sich gegeneinander gleichwie die Erzeugnisse oder zusammengesezte Verhältniß aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis. Man nenne die Grundlinie zwoer Dreieke G und g, ihre Höhen H und h, ihre Flächen F und f, so ist $F = \frac{1}{2} GH$, und $f = \frac{1}{2} gh$ (§. 157), folglich, $F : f = \frac{1}{2} GH : \frac{1}{2} gh$ (Alg. §. 235, 237), und $F : f = GH : gh$ (Alg. §. 227).

232. Folger. Weil die ganzen Grössen mit ihren Helften in gleicher Verhältniß stehen (Alg. §. 227), so verhalten sich auch die gleichlaufenden Viereke wie die Erzeugnisse aus ihren Grundlinien und Höhen, folglich bei Beibehaltung der vorigen Benennung ist $F = GH$, $f = gh$, und $F : f = GH : gh$.

233. Folger. Wenn $H = h$, so ist $F : f = G : g$; wenn aber $G = g$, so ist $F : f = H : h$; und wenn $GH = gh$, so ist auch $F = f$ (von Dreieken sehe hievon §. 158 und folgend.).

234. Folger. Wenn zwei gleichlaufende Viereke einander gleichen, so sind ihre Höhen den Grundlinien verkehrt verhältnißmässig und umge-

kehrt. Denn in solchem Fall ist GH = gh, woraus H : h = g : G (Alg. §. 258). Umgekehrt wenn H : h = g : G, so ist GH = gh. Gleiches bestehet bei den Dreieken.

235. Lehrs. Die Flächen der ähnlichen Dreieke verhalten sich, gleichwie die zusamgesezten Verhältnisse zweiten Grades jeder zwoer einander entsprechenden Seiten.

Beweis. Die Dreieke ABC, abc (Fig. 76) sind gegeneinander in der zusamgesezten Verhältniß aus ihren Höhen und Grundlinien (§. 231. Alg. §. 232), wenn also aus A und a die senkrechten AD und ad auf die Grundlinien BC und bc gefället werden, so ist △ ABC : △ abc = AD × BC : ad × bc; nun die Verhältniß AD : ad gleichet dieser BC : bc; denn in den ähnlichen △ ABC und △ abc ist AB : ab = BC : bc (§. 185), eben so in den ähnlichen △ ADB und △ adb ist AB : ab = AD : ad, also auch AD : ad = BC : bc; folglich, wenn man BC : bc anstat AD : ad in der allerersten Verhältnißgleichung ansezet, ist △ ABC : △ abc = BC × BC : bc × bc = $BC^2 : bc^2$.

Anmerk. Niemand, der die Begrife der Würde zweiten Grades (Alg. §. 133), der zusammengesetzten Verhältniß zweiten Grades (§. Alg. 232 — 3), und der Erzeugung des gleichseitigen Rechtekes (§. 146, 155) gehörig innehat, wird unüberzeugt sein, daß folgende Ausdrücke gleichgeltend sind; nemlich: Die Flächen ähnlicher

Viel-

Vieleke stehen in der zusamgesezten Verhältniß zweiten Grades der einander entsprechenden Seiten, oder sie verhalten sich, wie die Würfen zweiten Grades der einander entsprechenden Seiten, oder sie verhalten sich, wie die gleichseitigen Rechteke der einander entsprechenden Seiten. Denn jeder dieser Ausdrücke bedeutet die Vervielfältigung solcher Seiten mit sich selbst, das ist, die gleichseitigen Rechteke, welche auf solchen Seiten errichtet werden. Z. B. wenn man sagt, die Fläche des Dreiekes ABC (Fig. 77) verhält sich, wie das gleichseitige Rechtek der Seite BC, so versteht man das gleichseitige Rechtek F, das man sich auf der Seite BC errichtet vorbildet, u. s. w.

236. Folger. Sintemal die ähnlichen Dreieke die Helften von ähnlichen gleichlaufenden Viereken sind (§. 154), so stehen auch die ähnlichen gleichlaufenden Viereke in der zusamgesezten Verhältniß zweiten Grades der einander entsprechenden Seiten.

237. Folger. Die Flächen jeder ähnlichen Vieleke verhalten sich gegeneinander, wie die gleichseitigen Rechteke jeder einander entsprechenden Seiten solcher Vieleke. Denn, weil die ähnlichen Vieleke durch die Zwerchlinien in gleichviele ähnliche Dreieke getheilet werden (§. 205), ist (Fig. 69) $\triangle EAD : \triangle ead = EA^2 : ea^2$, $\triangle ADB : \triangle adb = AB^2 : ab^2$, $\triangle BDC : \triangle bdc = BC^2 : bc^2$ (§. 235), dahero $\triangle EAD + \triangle ADB + \triangle BDC$ (die ganze Fläche des

Vielecks): $\triangle$ ead + $\triangle$ adb + $\triangle$ bdc (zur ganzen Fläche) $= EA^2 : ea^2$, oder $AB^2 : ab^2$ (Alg. §. 270).

238. Folger. Die Flächen der ähnlichen regelmässigen Vieleke verhalten sich demnach gegeneinander, wie die gleichseitigen Rechteke der Halbmesser oder Durchmesser der umgeschriebenen Kreise; indeme in ähnlichen regelmässigen Vieleken die einander entsprechenden Seiten mit solchen Halbmessern oder Durchmessern eine gleiche Verhältniß enthalten (§. 210. Beweis).

239. Folger. Derowegen verhalten sich auch die Kreisflächen wie die gleichseitigen Rechteke ihrer Halbmesser oder Durchmesser. Denn die Kreise sind auch ähnliche regelmässige Vieleke (§. 211).

240. Lehrs. Das gleichseitige Rechtek F (Fig. 77) der Großseite gleichet den beiden gleichseitigen Rechteken G und H sämtlich genommen der Minderseiten, oder $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Beweis. Wenn man aus dem rechten Winkel A zur Grundlinie die senkrechte AD zieht, so scheidet diese das ganze in zwei Dreieke, welche sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich sind. Denn in $\triangle$ ABC und $\triangle$ ADC nebst dem gemeinschaftlichen C sind die rechten Winkel BAC, ADC einander gleich (§. 34), gleichermassen in $\triangle$ ABC und $\triangle$ ADB ist nebst B der Winkel BAC = BDA, der dritte gleichet dem dritten

(§. 132)

(§. 132), also $\triangle$ ADC ∽ $\triangle$ ABC, und $\triangle$ ADB ∽ $\triangle$ ABC (§. 120), derowegen auch $\triangle$ ADC ∽ ADB, folglich in $\triangle$ ABC und $\triangle$ ADC ist BC : AC = AC : DC (§. 185), hieraus $BC \times DC = AC^2$ (Alg. §. 252); eben so in $\triangle$ ABC und $\triangle$ ADB ist BC : AB = AB : BD, hieraus $BC \times BD = AB^2$, sodan die zwei Gleichungen zusamgebend, $BC \times DC + BC \times BD = AC^2 + AB^2$, oder (den gemeinschaftlichen Erzeuger BC nur einmal sezend) $BC (DC + BD) = AC^2 + AB^2$, und (weil $DC + BD = BC$) $BC \times BC$ oder $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

241. Folger Hieraus läßt sich auch das gleichseitige Rechtek einer jeden Minderseite finden (Alg. §. 189).

Anmerk. Der Lehrsaz §. 240 wird sonst folgendermassen ausgedrücket: Das Quadrat der Hipotenuse gleichet den beiden Quadraten der Katheten. Der Erfinder davon ist Pithagoras, dessen Zuhörer aus besonderer Achtung und Liebe gegen ihn ein Dankopfer von hundert Rindern jenem grossen Gott, der ihm die Gabe einer so wichtigen Erfindung verliehen, dafür geweiht haben.

242. Aufg. Mehreren gegebnen gleichseitigen Rechteken ein einziges gleiches zuerrichten.

Auflös. Man füge die zwei Seiten AB, BC (Fig. 78) zwoer der gegebnen Rechteke unter einem rechten Winkel B zusammen, und verbinde

ihre Endpunkte mit AC, so ist AC die Seite des gleichseitigen Rechtekes, wessen Fläche jenen zween, wovon die Seiten unter dem rechten Winkel B angestellet worden, gleichet (§. 240). Eben so füge man die Seite CD des dritten der gegebnen gleichseitigen Rechteke mit AC unter dem rechten Winkel ACD zusammen, und ziehe AD, so ist AD die Seite jenes gleichseitigen Rechtekes, welches den dreien gegebnen gleichet, u. s. w.

243. Folger. Solchergestalt kan man wievielen immer anderen Vieleken, massen sie in gleiche Dreieke (§. 229), und diese in gleichseitige Rechteke von gleichem Inhalt verwandlet werden (§. 230), ein einziges gleiches gleichseitiges Rechtek entwerfen.

244. Lehrs. Wenn man auf allen dreien Seiten eines rechtwinklichten Dreieks welch immer ähnliche Vieleke errichtet, so ist jenes F (Fig. 79) auf der Großseite jenen zween G, und H auf den Minderseiten gleich.

Beweis Denn es ist $F : G + H = BC^2 : AB^2 + AC^2$ (§. 237); nun $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (§. 240)), also auch $F = G + H$.

245. Aufg. Mehreren ähnlichen Vieleken ein einziges ähnliches und gleiches zuerrichten.

Auflös. Man suche gemäß §. 242 für die einander entsprechenden Seiten eine Seite, diese trage man alsdan in die entsprechende Seite eines

der

der gegebnen Vieleke ein, und verfahre nach §. 209, so wird dem Verlangen Genüge geleistet.

246. Lehrs. Wenn auf allen dreien Seiten eines rechtwinklichten Dreiekes A B C (Fig. 80) Halbkreise beschrieben werden, so gleichen die Halbmonden f und g Hippokrats dem Dreiek.

Beweis. Denn der Halbkreis h + BAC + i = f + h + g + i (§. 244), also auch (h + i von beiden Seiten der Gleichung hinwegnehmend) △BAC = f + g (§. 31. V.).

III. Abschnit.

Von Körpern.

I. Kapitel.

Von Kentnissen und Inhalt manigfaltiger Körper.

247. Erklär. Ein Körper ist im Mathematischen Verstand eine Ausdehnung in die Länge, Breite, und Höhe (§. 3, 13).

248. Erklär. Durch den Inhalt eines Körpers, oder durch den körperlichen Raum (soliditas, volumen) versteht man eben jenen Raum, den ein Körper besetzet, oder ausfüllet. Eben solchen Raum ohne aller Rücksicht der anhaftenden Eigenschaften eines Körpers macht eigentlich den Meßkünstlerischen Körper aus.

249. Erklär. Oberfläche eines Körpers (superficies corporis) ist eben jene Fläche, wodurch der Körper eingeschränket und bedeket wird. Grundfläche (basis corporis) heißt jene Fläche eines Körpers, auf welchen man sich den Körper aufgestellet vorbildet. Durch die Höhe eines Körpers (altitudo corporis) versteht man jene senkrechte Linie wel-

welche aus dem Scheitel oder Gipfel, das ist, aus dem höchsten Punkt eines Körpers auf dessen Grundfläche (die man sich nach Erförderniß auch verlängert vorstellen kan) herabgelassen wird.

250. Erklär. Einen körperlichen Winkel, oder ein Ek (angulus solidus) bestellen mehrere ebene gegeneinander geneigte Winkel AnB (Fig. 81), AnC, BnC, massen sie mit ihren Scheiteln in einem gemeinschaftlichen Punkt n zusammentrefen, und sich zugleich alle mit ihren Seiten an einander schliessen. Durch einen ebenen Winkel versteht man eine ebene Fläche, die mit ihren Seiten einen Winkel bildet (§. 22).

251. Folger. Zur Bildung eines körperlichen Winkels, oder eines Ekes sind wenigstens drei ebene Winkel erförderlich. Denn zwei gerade Flächen können sich nicht schliessen, sie fielen ehe übereinander (§. 215).

252. Folger. Die sämtlichen ebenen Winkel, welche ein Ek bestellen (§. 250), enthalten weniger als 360 Grade. Denn jene ebene Winkel, welche auf einer ebenen Fläche um einen Punkt bestehen, und (weil sie sich nicht gegeneinander neigen) kein Ek bilden (§. 250), betragen sämtlich 360° (§. 26).

Anmerk. Dieser lezte Saz läßt sich mittelst eines aus Papier bereiteten körperlichen Winkels, welcher sich an einer Seiten öffne, ganz deutlich begreifen. Denn, wenn man ihn auf einer ebe-

nen

nen Fläche vom Scheitel gegen solche Fläche drüket, so erfolget zwischen zween Seiten ein leerer Raum oder Winkel, der samt denen übrigen ebenen Winkeln 360° beträgt.

253. Erklär. Jene Körper, welche von mehreren geraden Flächen umgegeben, und eingeschlossen sind, werden vielflächigte Körper (polyedra) genennet: sonderheitlich von der Anzahl solcher Flächen ein vierflächigter (tetraëdrum): ein fünfflächigter (pentaëdrum): sechsflächigter (hexaëdrum), u. s. w. Ferner werden die vielflächigten Körper in regelmässige (regularia), und unregelmässige (irregularia) unterschieden. Jene sind mit regelmässigen untereinander gleichen Flächen eben so wie mit gleichen Eken umgegeben: diese mit irregelmässigen.

254. Erklär. Aehnliche Körper sind jene, welche von gleichvielen ähnlichen Flächen bedeket sind, und gleiche gleichviele Eken enthalten.

255. Lehrs. Der regelmässigen Körper giebt es nur fünf Gattungen: nemlich drei mit regelmässigen Dreieken: einer mit regelmässigen Vierеken: und einer mit regelmässigen Fünfeken begrenzt.

Beweis. 1) Im regelmässigen Dreiek enthält jeder Winkel 60 Grade (§. 137); also drei derlei Winkel betragen 180°, viere betragen 240°, fünfe betragen 300, folglich kan daraus ein Ek bestehen, aber aus mehreren nicht (§. 252).

2) Im

2) Im regelmässigen Vierek enthält jeder Winkel 90°, also drei solche Winkel betragen sämtlich 270°, folglich kan daraus ein Ek bestehen, aber aus mehreren nicht (§. 252).

3) Im regelmässigen Fünfek enthält jeder Winkel 108° (§. 164), also drei enthalten sämtlich 324°, folglich kan daraus ein Ek bestehen, aber aus mehreren nicht, indeme sie über 360° enthielten. Anderer regelmässiger Vieleke auch nur drei Winkel (§. 252) enthalten mehrere Grade, als daß sie einen körperlichen Winkel bestellen können; also.

256. Folger. Der erste regelmässige Körper (§. 255) ist von vier regelmässigen Dreieken, und eben sovielen Eken (Fig. 82) eingeschlossen: der zweite von acht Dreieken (Fig. 83): der dritte von zwanzig Dreieken (Fig. 84): der vierte von sechs regelmässigen Viereken (Fig. 85): der fünfte von zwölf regelmässigen Fünfeken, und eben sovielen Eken (Fig. 86).

257. Erklär. Wenn sich ein Vielek ABCDE (Fig. 87) aus seiner Lage stets gleichlaufend hinwegbeweget, und ununterbrochen Spuren nach sich zurükläßt, bis es dan straks in seiner Bewegung gehemmet werde, so entsteht ein gleichlaufender Körper (Säule, Eksäule, Pfeiler) oder säulenförmiger Körper (prisma). Ist die Grundfläche, oder die Erzeugfläche ein regelmässiges Vierek, und die Höhe des Körpers der Breite oder Länge gleich, so heißt der erzeugte Körper sonderheitlich ein Würfel (cubus), als der sechsflächigte

flächigte regelmässige Kärper §. 255 (Fig. 85): ist die Erzeugfläche ein länglichtes gleichlaufendes Vierek: ein länglicht gleichlaufender Körper (parallelepipedum), wie Fig. 88; ist aber die erzeugende Fläche ein Kreis: eine Walze, ein walzenförmiger Körper oder Rundsäule, rundsäulenförmiger Körper (cylinder), wie Fig. 89.

258. Folger. Der gleichlaufende Körper wird nebst der unteren und oberen Grundfläche von sovielen gleichlaufenden gleichhohen Viereken oder Seitenflächen begrenzet, als die Erzeugfläche Seiten enthält. Denn jede Seite der bewegten Erzeugfläche bestreichet ein gleichlaufendes Vierek, wie es aus der vorhergehenden Erzeugungsart einleuchtet.

259. Folger. Der ganze gleichlaufende Körper bestehet aus nichts anderen, als aus der Erzeugfläche so oft gesezt, als in desselben Höhe Punkte sind.

260. Erklär.. Der gleichlaufende Körper wird in Ansehung der Erzeugfläche ein dreiekigter (soferne sie ein Dreiek ist): vierekigter: fünfekigter, u. s. w. genant. Senkrecht (rectum) ist er; wenn seine Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht stehen: schief (obliquum) im widrigen Fall.

261. Lehrs. Die Oberfläche des gleichlaufenden Körpers ohne der oberen und unteren Grundfläche gleichet dem Erzeugniß aus dem Umfang

der

der Erzeugfläche, und aus der Höhe des Körpers.

Beweis. Solche Oberfläche bestehet aus so-vielen gleichhohen gleichlaufenden vierekigten Seitenflächen, als in der Erzeugfläche Seiten sind (§. 258); nun alle diese Seitenflächen sämtlich sind dem angeführten Erzeugniß gleich (§. 156).

262. Folger. Die Fläche der Walze, die auch ein gleichlaufender Körper ist, gleichet dem Erzeugniß aus dem Umkreis der Erzeugfläche und aus der Höhe.

263. Folger. Wenn demnach die Höhe einer Walze dem Durchmesser gleichet, so ist die krumme Oberfläche viermal so groß, als die Grundfläche. Denn die krumme Oberfläche gleichet dem ganzen Erzeugniß aus dem Umkreis und aus der Höhe oder diesfälligen Durchmesser (§. 261): die Grundfläche aber nur dem vierten Theil solchen Erzeugnisses (§. 223).

264. Folger. Wenn man demnach die Grundflächen eines gleichlaufenden Körpers insbesondere nach ihren Gattungen bestimmet, und solche zu der übrigen Fläche hinzugiebt, erhält man dessen ganze Oberfläche.

265. Lehrs. Der Inhalt eines gleichlaufenden Körpers gleichet dem Erzeugniß aus der Erzeugfläche und aus dessen Höhe.

Be-

Beweis. Denn die Erzeugfläche ist so oft darinnen enthalten, als Punkte in dessen Höhe sind (§. 259).

266. Folger. Gleiches bestehet mit der Walze.

267. Folger. Um den körperlichen Inhalt eines hohlen walzenförmigen Körpers zufinden, hat man ihn samt seiner Höhle als einen dichten Körper zubetrachten, und in solchem Anbetracht den ganzen körperlichen Inhalt zuberechnen, sodan insbesondere seine Höhle zubestimmen, und diese von dem vorigen ganzen Inhalt abzuziehen (dies versteht sich auch bei den übrigen hohlengleichlaufenden Körpern).

Anmerk. Der Würfel ist das schiklichste Körpermaß, namentlich: die Würfelklafter, oder Körperklafter, sonst Kubikklafter (hexapeda cubica): Würfelschuh, oder Körperschuh, sonst Kubikschuh (pes cubicus): Würfelzoll, u. s. w. Weswegen eines Körpers Inhalt suchen, oder ihn ausmessen ist eben soviel, als untersuchen, wie viel er Würfelklafter oder Würfelschuhe (u. s. w.) enthalte. Das Zeichen im Körpermaß ist dies: c oder ⊠, massen solches nebst den gewöhnlichen Zeichen des Längenmasses zur Rechten obenher beigefüget wird: $3^{oc}\ 7^{Ic}$ oder $3⊠^{o}\ 7⊠^{I}$ heißt 3 Würfelklafter und 7 Würfelschuh.

268. Erklär. Wenn sich ein Vielek ABCD (Fig. 90) aus seiner Lage stets gleichlaufend nach der Richtung einer geraden Linie hinwegbeweget,

und

und ununterbrochen Spuren nach sich zurüklässt; zugleich aber auch jedem Augenblick um eine unendlich kleine Grösse der Seiten abnimt, bis es endlich zu einem Punkt E vermindert wird, so entsteht eine Spizsäule sonst **Piramide** (pyramis): In Ansehung der Grundfläche wird sie eine **dreiekigte: vierekigte: fünfekigte**, u. s. w. genennet. Die Spizsäule ist **senkrecht** (pyramis recta), wenn sich ihr Gipfel in jener senkrechten Linie, welche aus der Mitte der Grundfläche errichtet wird, befindet; im widrigen Fall ist sie **schief** (obliqua).

269. **Folger.** Die Spizsäule wird mit so vielen dreiekigten Seitenflächen eingeschlossen, als in der Grundfläche Seiten sind. Alle diese Seitenflächen haben in der senkrechten Spizsänle gleiche Höhe, welche durch jene senkrechte Linie, die aus dem Gipfel auf welch immer eine Seite der Grundfläche fällt, bestimmet wird (§. 117).

270. **Folger.** Die Spizsäule bestehet aus sovielen der Grundfläche ähnlichen Vieleken, als in ihrer Höhe Punkte sind. Die Seiten dieser ähnlichen Vieleke wachsen vom Gipfel der Spizsäule gegen der Grundfläche um eine unendlich kleine Grösse, folglich, weil in der Höhe unendlich viele Punkte begreiflich sind, bestellen sie eine unendliche Reihe der natürlichen Zahlen (Alg. §. 273).

271. **Lehrs.** Die Oberfläche einer senkrechten Spizsäule ohne der Grundfläche gleichet dem

G Erzeug-

Erzeugniß aus dem halben Umfang der Grundfläche und aus der senkrechten Linie, welche aus dem Scheitel der Spizsäule auf welch immer eine Seite der Grundfläche gefället wird.

Beweis. Denn solche Oberfläche bestehet aus soviclen gleichhohen Dreieken, als Seiten in der Grundfläche sind (§. 269); nun die Grundlinien solcher Dreieke machen den Umfang der Grundfläche aus, und die Fläche eines jeden Dreiekes gleichet dem Erzeugniß aus seiner halben Grundlinie und aus seiner Höhe (§. 157), welche hier allen Dreieken gemeinschaftlich und die erwehnte senkrechte Linie ist.

272. Folger. Sintemal die Seitendreieke einer schiefen Spizsäule nicht alle gleichhoh sind, müssen sie insbesondere (nebst der Grundfläche) berechnet, und dan zusammengegeben werden um die ganze Oberfläche einer schiefen Spizsäule zubestimmen.

273. Erklär. Wenn die Grundfläche der Spizsäule ein Kreis ist, so heißt sie sonderheitlich ein Kegel (conus), wie Fig. 91.

274. Folger. Die Oberfläche eines Kegels (ohne der Grundfläche, welche insbesondere (nach §. 222, 224) zuberechnen ist) gleichet demnach dem Erzeugniß aus dem halben Umkreis der Grundfläche, und aus der Seite A B (Fig. 91) des Kegels. Denn die senkrechte Linie aus dem Gipfel auf

fel auf die Seite der Grundfläche kömt mit der Seite des Kegels überein.

Anmerk. Die Bestimmung der Oberfläche eines schiefen Kegels wird der höheren Mathematik vorbehalten.

275. Erklär. Wenn die Erzeugfläche einer Spizsäule ehe gehemmet wird, als sie in einen Punkt übergeht, so wird eine abgekürzte Spizsäule (pyramis truncata), wie Fig. 92, oder in Ansehung des Erzeugkreises ein abgekürzter Kegel (conus truncatus) dargestellet, wie Fig. 93.

276. Folger. Die abgekürzte Spizsäule wird ausser der oberen und unteren gleichlaufenden Flächen von sovielen gleichhohen Viereken, in welchen die obere und untere Seite einander gleichlaufend sind, begrenzet, als die Grundfläche Seiten enthält.

277. Lehrs. Die Oberfläche einer abgekürzten Spizsäule ausser den beiden Grundflächen gleichet dem Erzeugniß aus der halben Summe der Umfänge beider Grundflächen und aus der senkrechten Linie, welche zwischen zween entgegengesezten gleichlaufenden Seiten der zween Grundflächen bestehet.

Beweis. Denn die abgekürzte Spizsäule wird ausser beiden Grundflächen von sovielen gleichhohen Viereken, deren zwei entgegengesezte Seiten gleichlaufend sind, eingeschränket, als in

der Erzeugfläche Seiten sind (§. 276); nun die Fläche eines jeden derlei Vierekes gleichet dem Erzeugniß aus der halben Summe der zween gleichlaufenden Seiten, und aus der senkrechten Linie, welche zwischen eben solchen zween gleichlaufenden Seiten bestehet (§. 218), und die sämtlichen derlei gleichlaufenden Seiten machen die Umfänge der beiden Grundflächen aus.

278. Folger. Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels ausser den Grundflächen gleichet demnach dem Erzeugniß aus der halben Summe der Umkreise beider Grundkreise, und aus der Seite des abgekürzten Kegels.

279. Folger. Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels gleichet diesemnach auch dem Erzeugniß aus der Seite des abgekürzten Kegels, und aus dem mitleren Rechenkünstlerisch verhältnißmässigen Umkreis zwischen den Umkreisen der zween Grundkreise. Denn solcher mitlere Umkreis gleichet der halben Summe der Umkreise beider Grundkreise. Denn, wenn der obere Kreis $= u$, der untere $= U$, zwischen diesen zween der mitlere $= m$, so bestehet $u : m = m : U$, sodan $\frac{u + U}{2} = m$ (Alg. §. 248).

280. Lehrs. Der Inhalt jeder Spizsäule gleichet dem dritten Theil des Erzeugnisses aus ihrer Grundfläche und Höhen.

Beweis. Die Seiten der ähnlichen Flächen oder

Virl=

Vieleke, woraus die Spizsäule bestehet, bestellen eine unendliche Reihe der natürlichen Zahlen (§. 270); nun die ähnlichen Vieleke verhalten sich wie die Würden zweiten Grades ihrer Seiten (§. 237), also bestellen die ähnlichen Vieleke, woraus die Spizsäule bestehet, folglich die Spizsäule selbst eine unendliche Reihe zweiten Grades der natürlichen Zahlen; nun die Summe oder Inhalt solcher Reihe gleichet einem Drittel des Erzeugnisses aus dem lezten Glied, welches hier die Grundfläche ist, und aus der Anzahl der Glieder, welche hier die Höhe ist (Alg. §. 302), also.

281. Folger. Dannenhero gleichet auch der Inhalt des Kegels einem Drittel des Erzeugnisses aus seinem Grundkreis, und Höhe.

282. Folger. Wenn demnach eine Spizsäule mit einem gleichlaufenden Körper, und ein Kegel mit einer Walze gleiche Grundfläche und Höhe besitzen, so gleichet die Spizsäule einem Drittel des gleichlaufenden Körpers, und der Kegel einem Drittel der Walze (§. 265, 280, 266, 281).

283. Folger. Wenn eine Spizsäule und ein Kegel gleichhoch, und ihre Grundflächen von gleichem Inhalt sind, so sind sie in Rüksicht des körperlichen Inhalts einander gleich. Eben dies besteht mit den gleichlaufenden und walzenförmigen Körpern.

284. Folger. Wenn man sich eine abgekürzte Spizsäule oder Kegel (Fig. 92, 93) als

ergänzt vorbildet, und solchergestalt sowohl den ganzen körperlichen Inhalt, als auch den oberen abgestuzten Theil insbesondere berechnet, sodan diesen von dem ganzen Inhalt abzieht, so erhält man den körperlichen Inhalt der abgekürzten Spizsäule oder Kegels. Oder wenn man zwischen der oberen und unteren Grundfläche die mitlere verhältnißmässige suchet (Alg. §. 248. N. 2), und solche mit der Höhe der abgekürzten Spizsäule oder Kegels vielfältiget.

Anmerk. Auf die leztere Art läßt sich auch der Inhalt eines Weinfasses, das aus zween abgekürzten in der Mitte des Fasses mit ihren grösseren Grundflächen an einander gesezten Kegeln bestehet, bestimmen.

285. Erklär. Die Erzeugung der **Kugel** (sphæra, globus) läßt sich durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser mit Rüklassung seiner Spuren füglich begreifen. Man kan sich aber in solchem Halbkreis entweder eine unzehlige Menge gleichlaufender aus dem Durchmesser in unendlich kleiner gegenmässiger Entfernung bis zum Halbumkreis senkrecht errichteter Linien (wie in Fig. 94 zusehen), oder soviele gleichlaufende Halbumkreise, als im Halbmesser Punkte sind (wie Fig. 95), vorbilden. Im ersten Fall der Erzeugung lassen sich in der Kugel soviele abgekürzte Kegel von unendlich kleiner Höhe begreifen, als Pare der gleichlaufenden Linien sind. Denn die unendlich kleine Bögen, welche im Halbumkreis von den gleichlaufenden Linien eingeschrenket

ket sind, und mit den Berührlinien übereinfallen, können für gerade Linien angesehen werden. Im zweiten Fall bestehet die Kugel aus sovielen gleichlaufenden runden unendlich dünnen Flächen oder Schichten, als im Halbmesser Punkte sind.

286. Folger. Die sämtlichen Höhen der abgekürzten Kegel, aus welchen die Kugel in Rüksicht des im ersten Fall (§. 285) gedachtermassen gestalteten Erzeughalbkreises bestehet, bestellen den Durchmesser oder die Höhe der Kugel, und die sämtlichen Seitenflächen derenselben machen die ganze Oberfläche der Kugel aus.

287. Folger. Die Halbmesser der gleichlaufenden kugelrunden Flächen, woraus die Kugel in Rüksicht der im zweiten Fall (§. 285) gedachten Erzeugungsart bestehet, wachsen vom Mittelpunkt zum Endpunkt des Halbmessers der Kugel in der unendlichen Reihe der natürlichen Zahlen; weil in dem Halbmesser der Kugel unendlich viele Punkte begreiflich sind.

288. Erklär. Wenn die Kugel durch eine ebene Fläche durchgeschnitten wird, so ist der Durchschnit allzeit ein Kreis. Reichet die schneidende Fläche durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist der Durchschnit der größte Kreis, wie es sich aus §. 71, 72 ergiebt. Hieraus wird verständig, welcher der größte Kreis, und größte Umkreis einer Kugel sei.

289. Lehrs. Die krumme Fläche eines je-

den abgekürzten Kegels derjenigen, welche in der Kugel begreiflich sind, gleichet dem Erzeugniß aus der einzelnen Höhe des abgekürzten Kegels, und aus dem größten Umkreis der Kugel.

Beweis. Es sei ACDEH (Fig. 96) der größte Kreis einer Kugel. In ACEG stelle man sich einen solchen abgekürzten Kegel vor: in AG dessen oberen Kreis: in CE den unteren: in BF den mitleren Rechenkünstlerisch verhältnißmässigen Umkreis zwischen dem oberen und unteren. Der Halbmesser MH sei zu den Grundflächen des abgekürzten Kegels senkrecht, so ist IL die Höhe des solchen Kegels. Der Kugel größten Umkreis ACDEH, dessen Halbmesser BM ist, wollen wir U benennen; der mitlere Umkreis zwischen dem oberen und unteren Umkreis des abgekürzten Kegels, dessen Halbmesser BK ist, sei m. Dies vorausgesetzt, ist die krumme Fläche des abgekürzten Kegels bekantermassen AC × m (§. 279), und das Erzeugniß aus der Höhe solchen abgekürzten Kegels, und aus dem größten Umkreis der Kugel ist IL × U; nun AC × m = IL × U. Denn, wenn man aus A zu CE die senkrechte Linie AN zieht, sind die Dreieke NAC, MKB einander ähnlich, weil nebst den rechten Winkeln ANC, und BKM die Winkel ACN und BMK gleich sind, indeme der Winkel ACN dem Winkel ABF gleich (§. 60) den Bogen BH, welchen sich auch der Winkel BMK oder BMH zueignet (§. 25), zum Maß hat (§. 89); folglich ist AC: AN = BM: BK (§. 185), oder IL

anstatt

anstatt gleichen AN (§. 56), AC: IL = BM: BK, sodan für die Halbmesser BM und BK ihre Umkreise, welchen sie verhältnißmässig sind (§. 211), ansetzend, ist AC: IL = U: m (Alg. §. 264), woraus AC × m = IL × U, also.

290. Lehrs. Die Oberfläche der Kugel gleichet dem Erzeugniß aus der Höhe und größten Umkreis der Kugel.

Beweis. Die gesamten krummen Flächen der abgekürzten Kegel, woraus die Kugel besteht machen die Oberfläche der Kugel aus (§. 286); nun die krumme Fläche eines jeden derlei abgekürzten Kegels gleichet dem Erzeugniß aus der einzelnen Höhe desselben, und aus dem größten Umkreis der Kugel (§. 289), und die gesamten Höhen der abgekürzten Kegel gleichen der Höhe, oder dem Durchmesser der Kugel (§. 286), also.

291. Folger. Die Kugelfläche gleichet demnach der krummen Fläche einer Walze (ohne der oberen und unteren Grundfläche), welche mit der Kugel gleiche Höhe und gleichen Durchmesser hat. Denn, wenn man solche gleiche Höhen oder Durchmesser durch D, und den gleichen Umkreis durch U vorstellet, ist sowohl die Kugelfläche, als die krumme Walzenfläche = DU (§. 290, 262).

292. Folger. Die Kugelfläche ist viermal so groß, als ihre größte Kreisfläche. Denn jene gleichet dem ganzen Erzeugniß aus der Höhe oder Durch-

Durchmesser, und aus dem größten Umkreis (§. 290), diese aber einem Viertel desselben (§. 223).

293. **Folger.** Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich wie die Würden zweiten Grades (wie die gleichseitigen Rechteke) der Halbmesser oder Durchmesser dererselben. Denn, wenn man die Oberfläche der einen aus zween Kugeln durch O; der anderen durch o: den größten Kreis der einen durch K der anderen durch k: ihre Halbmesser durch H und h: die Durchmesser durch D und d darstellet, so ist $O = 4\,K$, und $o = 4\,k$ (§. 292); hieraus ist $O : o = 4\,K : 4\,k$ (Alg. §. 235), sodan $O : o = K : k$ (Alg. §. 227); nun $K : k = H^2 : h^2 = D^2 : d^2$ (§. 239), also $O : o = H^2 : h^2 = D^2 : d^2$.

294. **Folger:** Die Oberfläche der Kugel verhält sich zu der ganzen Oberfläche der Walze, welche mit der Kugel gleiche Höhe und gleichen Durchmesser hat, wie 2 zu 3. Denn, weil die diesfällige krumme Walzenfläche gleich (§. 291), und derowegen viermal so groß ist, als die größte Kreisfläche oder ihre Grundfläche (§. 292), so ist die ganze Oberfläche solcher Walze (beide Grundflächen eingerechnet) sechsmal so groß, als die größte Kreisfläche, folglich ist die Kreisfläche zu der diesfälligen ganzen Walzenfläche, wie $6\,K : 4\,k$, das ist (mit 2 getheilt), wie 2 zu 3 (Alg. §. 225).

295. **Lehrs.** Der körperliche Inhalt der Kugel

gel gleichet dem dritten Theil des Erzeugnisses aus der Oberfläche und Halbmesser derselben.

Beweis. Die unendlich dünnen kugelrunden Flächen, woraus der Bestand der Kugel begreiflich ist (§. 285), verhalten sich, wie die Würden zweiten Grades ihrer Halbmesser (§. 293), folglich, weil ihre Halbmesser eine (einfache) unendliche Reihe der natürlichen Zahlen bestellen (§. 287), bestellen sie eine unendliche Reihe zweiten Grades der natürlichen Zahlen, in welcher sich die Anzahl der Glieder durch den Halbmesser und das lezte Glied durch die Oberfläche der Kugel vorstellen läßt; nun Alg. §. 302, also.

Anmerk. Z. B. die Höhe einer Kugel sei $= 14'$, so ist ihr größter Umkreis $= 44'$ (§. 213), ihr Oberfläche $= 44' \times 14' = 616\square'$ (§. 290), und ihr körperlicher Inhalt $= \frac{1}{3} \times 616\square' \times 7' = 1437\frac{1}{3}\boxtimes'$.

296. Folger. Der Inhalt der Kugel gleichet demnach zweien Dritteln des Erzeugnisses aus dem größten Kreis und aus dem Durchmesser derselben. Denn, wenn der größte Kreis $= K$ und der Durchmesser $= D$, so ist die Kugelfläche $= 4K$ (§. 292), und $\frac{1}{3}$ des Halbmessers $= \frac{1}{6}D$; folglich der körperliche Inhalt der Kugel $= 4K \times \frac{1}{6}D$ (§. 295) $= \frac{4}{6}KD = \frac{2}{3}KD$.

297. Folger. Die Kugel gleichet $\frac{2}{3}$ der Walze, mit welcher sie gleiche Höhe und gleichen Durchmesser hat (§. 266).

298. Folger. Also verhält sich auch die Kugel zur Walze von gleicher Höhe und Durchmesser, wie 2 zu 3 (§. 294).

Anmerk. 1. Aus der bisherigen Körperlehre lassen sich sowohl die Oberflächen als auch die körperlichen Ausdehnungen der fünf regelmässigen Körper (§. 255) berechnen, obschon hievon keine Erwehnung insbesondere geschieht. Denn der erste derlei Körper ist eine Spizsäule: der zweite eine doppelte an ihrer Grundfläche entgegengesezte Spizsäule: der vierte ist ein Würfel (welcher sechs gleiche im innersten Punkt mit ihren Gipfeln zusamstossende Spizsäulen enthält): der dritte und fünfte bestehen aus sovielen gleichhohen Spizsäulen, derer Gipfel in einem inneren Punkt zusammentrefen, die Grundflächen aber die ganze Oberfläche solcher Körper ausmachen, als diese Oberfläche mit geraden Flächen bedeket ist. Um die übrigen unregelmässigen, und unordentlichen Körper, soviel es thunlich ist, zuberechnen, stellet man sich dieselben gleichsam in Theile, die unter die Gattungen der bishero behandelten Körper beinahe gezehlet können werden, gesondert vor, oder man leget sie in ein ordentliches Gefäß, überdeket sie mit Wasser, und berechnet den vom Wasser besezten körperlichen Raum des Gefässes, da sich solche Körper sowohl darinnen befinden, als auch nachdeme sie wiederum herausgenommen worden; der leztere körperliche Raum vom ersteren abgezogen bestimmet den verlangten Inhalt des unordentlichen Körpers. Daferne durch Wasser sol-

chen

chen Körpern Schaden zugefüget würde, kan Wellsand statt Wassers angewendet werden, u. s. w.

Anmerk. 2. Gleichwie der Kreis unter die regelmässigen Vieleke (§. 211), eben so wird füglich die Kugel in Rüksicht auf die unendlich kleinen, folglich geraden regelmässigen gleichen Flächgen, die man sich in ihrer Oberfläche vorbilden kan, unter die regelmässigen Körper gerechnet.

II. Kapitel.

Von Vergleichungen der Körper.

299. Lehrs. Die gleichlaufenden Körper verhalten sich gegeneinander, wie die zusamgesezte Verhältniß aus ihren Höhen, und Grundflächen.

Beweis. Es seien derlei zwei Körper I und i: ihre Höhen H und h: die Grundflächen G und g, so ist I = GH, und i = gh (§. 265); folglich I: i = GH: gh; nun GH : gh ist aus G : g, und H : h zusamgesezt.

300. Folger. Auch die Spizsäulen und Kegel verhalten sich gegeneinander in der zusamgesezten Verhältniß aus ihren Höhen, und Grundflächen. Denn sie sind I: i = $\frac{1}{3}$ GH $\frac{1}{3}$ gh (§. 280, 281); folglich (mit 3 gevielfältigt) I: i = GH: gh (Alg. 225).

301.

301. Folger. Ist demnach $H = h$, so ist $I : i = G : g$ (mit H und h getheilt); ist aber $G = g$, so ist $I : i = H : h$, das ist, wenn diese Körper gleiche Höhe besitzen, verhalten sie sich, wie ihre Grundflächen, besitzen sie gleiche Grundflächen, so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

302. Folger. Ist $A = a$, so ist auch $GH = gh$, sodan $G : g = h : H$, und umgekehrt, wenn $G : g = h : H$, so ist $A = a$, das ist, sind die derlei Körper einander gleich, so befinden sich ihre Grundflächen mit den Höhen in verkehrter Verhältniß (Alg. §. 258), und gegenmässig.

303. Lehrs. Die ähnlichen gleichlaufenden Körper I und i (Fig. 97) verhalten sich wie die Würden dritten Grades welch immer ihrer einander entsprechenden Seiten, als $BC^3 : bc^3$.

Beweis. Es ist $I : i = AB \times BCD : ab \times bcd$ (§. 299), oder, weil $AB : ab = BC : bc$ (§. 114), ist $I : i = BC \times BCD ; bc \times bcd$ (Alg. §. 264); nun $BCD : bcd = BC^2 : bc^2$ (§. 237), also $I : i = BC \times BC^2 : bc \times bc^2 = BC^3 : bc^3$ (auch bei schiefen derlei Körpern, wie Fig. 98, vermög $EF : ef = ED : ed = DC : dc$, ist $I : i = DC^3 : dc^3$).

304. Folger. Gleiches bestehet mit den ähnlichen Spizsäulen.

305. Folger. Dannenhero verhalten sich auch sowohl die Walzen als auch die Kegel gegen-

einander

einander wie die Würden dritten Grades der Halbmesser ihrer Grundflächen.

306. Lehrs. Die Kugeln verhalten sich, wie die Würden dritten Grades ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

Beweis. Es seien die Inhalte zwoer Kugeln I und i, so ist $I : i = \frac{2}{3} KD : \frac{2}{3} kd$ (§. 296) $= KD : kd$, folglich in der zusamgesezten Verhältniß aus $K : k$ und $D : d$; nun $K : k = D^2 : d^2$ (§. 239), also $I : i = D \times D^2 : d \times d^2 = D^3 : d^3$, oder die Halbmesser H und h ansezend, ist $I : i = H^3 : h^3$.

IV. Ab-

IV. Abschnit.

Die Dreiekmeßkunst.

I. Kapitel.

Von den Gründen der Dreiekmeßkunst.

307. **Erklär.** Jedes Dreiek bestehet aus drei Seiten und eben sovielen Winkeln. Ein **Dreiek auflösen** (triangulum resolvere) ist eben soviel, als aus dreien dieser sechs Stüke die übrigen durch Rechnungen bestimmen. Jene Wissenschaft, oder jener Theil der Meßkunst, welcher das Dreiek solchergestalt aufzulösen lehret, heißt sonderheitlich die **Dreiekmeßkunst** (trigonometria τριγωνον Dreiek, μετρεω ich messe), und zwar **ebene** (plana) von ebenen oder geraden: **kugelkrumme** (sphærica) von kugelkrummen Dreieken. Der Gegenstand unsers Zwekes ist hier nur die ebene Dreiekmeßkunst.

308. **Folger.** Jene drei Theile des Dreiekes, aus welchen die übrigen zubestimmen sind, müssen demnach mit denen zubestimmenden in Verbindniß und Verhältniß stehen. Aber

309. **Lehrs.** Die Seiten des Dreiekes sind den entsprechenden Winkeln nicht verhältnißmässig.

Be-

Beweis. Die Winkel im Dreiek wachsen nicht in gleicher Verhältniß mit den entsprechenden Seiten, obwohlen sie wachsen, da diese wachsen (§. 134). Denn, wenn man einem Umkreis ein Dreiek ABC (Fig. 99), dessen eine Seite AC dem Halbmesser des Umkreises gleich sei, einschreibet, und alsdan eben solche Seite verdoppelt, damit sie dem Durchmesser DC gleiche, so ist der Bogen DAC, welcher von der doppelt grossen Seite DC abgeschnitten wird, und 180° enthält (§. 18, 21), nicht zweimal, sondern dreimal so groß, als der Bogen AC, welcher von der einfachen Seite AC abgeschnitten wird, und 60° enthält (§. 173), folglich ist auch der halbe Bogen DAC oder der Winkel DBC, dessen Maß er ist (§. 90), nicht zweimal, sondern dreimal so groß, als der halbe Bogen AC, oder der Winkel ABC, dessen Maß er ist.

310. Folger. Um demnach aus den Winkeln die Seiten, und aus den Seiten die Winkel mittelst Verhältnißgleichungen zufinden, ist nöthig anstat der Winkel solche Grössen anzusezen, welche in Rechnungen die Winkel vorstellen, und deren entsprechenden Seiten verhältnißmässig sind.

311. Erklär. Die Grössen, welche in Rechnungen die Stelle der Winkel vertreten, und sich im Dreiek wie die den Winkeln entsprechenden Seiten verhalten (was weiter unten bewiesen wird), sind einige gerade Linien, und können derowegen überhaupt **stellvertretende Linien**, oder **Stellvertretungslinien** der Winkel (functiones angu-

lorum) genennet werden. Derlei Gattungen sind Schoslinien, Berührlinien, und Schneidlinien. Schos, oder Schoslinie, oder auch **rechte Schoslinie** (sinus, v. sinus rectus) eines Winkels BAC (Fig. 100), oder des Bogens BC eines Winkels BAC (§. 25) ist eine gerade Linie BD, welche aus dem Endpunkt B des einen oder des anderen Schenkels, oder aus dem einen oder anderen Endpunkt des Bogens, der aus dem Scheitel des Winkels zwischen dessen Schenkeln mit beliebigem Halbmesser beschrieben wird, zu dem anderen Schenkel senkrecht gezogen wird. Das Stük DC des Schenkels und Halbmessers AC, welches zwischen der rechten Schoslinie und dem Bogen enthalten ist, heißt **verkehrte Schoslinie** (sinus versus). Die **Berührlinie** (tangens) eines Winkels BAC, oder dessen Bogens BC ist eine gerade Linie CE, welche aus dem Endpunkt C des einen oder des anderen Schenkels oder aus dem einen oder anderen Endpunkt des Bogens senkrecht errichtet wird, bis sie mit dem anderen Schenkel, massen selbiger verlängert wird, zusammentrift: eben solcher verlängerte Schenkel AE ist die **Schneidlinie** (secans) des Winkels oder dessen Bogens.

312. Lehrs. Je grösser ein scharfer Winkel, oder ein Bogen von 1 bis 90 Grade ist, desto grösser sind seine Stelivertretungslinien. Je grösser hingegen ein stumpfer Winkel oder ein Bogen über 90 bis 180 Grade ist, desto kleiner sind seine Stellvertretungslinien.

Be-

Beweis. BF (Fig. 101) ist die Schoslinie vom Winkel BMD, und CG ist es vom CMD (§. 311); nun BF ist grösser als CG und zwar um Bo, denn; wenn man zu MD durch C die gleichlaufende CI zieht, ist CG = oF (§. 56): Eben so ist des Winkes BMD Berührlinie DL > DK, und die Schneidlinie ML > MK. Um den zweiten Theil des Lehrsazes zu beweisen, wollen wir die zwei stumpfen Winkel EMB, EMC wählen. Wenn man aus dem Endpunkt E des Schenkels EM zu MB eine senkrechte Linie fällen will, muß man nothwendigerweis den Schenkel BM auf die entgegengesezte Seite gegen Q verlängern, und dan fällt solche senkrechte Linie aus E auf P, folglich ist EP die Schoslinie des Winkels EMB, EQ dessen Berührlinie, und MQ die Schneidlinie; gleichergestalt ist En die Schoslinie des Winkels EMC, ER die Berührlinie dessen, und MR die Schneidlinie; nun En < EP, ER < EQ, und MR < MQ, also.

313. Folger. Die Schoslinie des rechten Winkels AMD gleichet demnach dem Halbmesser, und ist die größte aus allen Schoslinien. Denn die aus A auf MD herabgelassene senkrechte Linie fällt mit dem Halbmesser AM überein (§. 38). Sie ist um AH grösser, als die nächste Schoslinie BF (folglich auch als alle übrigen), wie es erhellet, wenn man zu DM durch B die gleichlaufende BH zieht. Auch die verkehrte Schoslinie MD des rechten Winkels gleichet dem Halbmesser, und die Berührlinie trift mit der Schneidlinie, weil sie gleichlaufend sind (§. 61. N. 3),

nirgends zusammen, wenn sie auch ohnendlich verlängert würden; eben derohalben sieht man beide diese als unendliche an.

314. Erklär. Die Schoslinie des rechten Winkels, weil sie die größte aus allen ist, und in Rüksicht der übrigen als ein Ganzes angesehen kan werden, wird sonderheitlich die ganze Schoslinie, oder Großschoslinie (sinus totus) benamset.

Anmerk. Wenn das Wort Schoslinie ohne anderen Beisaz vorkömt, wird allzeit die rechte Schoslinie (§. 311) dadurch verstanden. Ferner was von einem Winkel gesagt wird, das versteht sich auch von dem Bogen, der ihn messet, und umgekehrt.

315. Erklär. Jener schiefe Winkel, welcher einem anderen zu zween rechten Winkeln manglet, heißt hier in Rüksicht desselbigen die Ersetzung oder der Ersetzungswinkel (supplementum). So z. B. ist BMD (Fig 101) der Ersetzungswinkel von BME, und umgekehrt. Der Ersetzungswinkel ist also in Rüksicht desselbigen den er zu zween rechten ersetzet, der Nebenwinkel.

316. Lehrs. Die Nebenwinkel haben gleiche Stellvertretungslinien.

Beweis. Man wähle (Fig. 101) die zwei Nebenwinkel BMD und BME. Die Schoslinie des Winkels BMD ist BF (§. 311): nun BF

ist

ist auch vom Winkel B M E die Schoslinie, wenn man aus B als dem Endpunkt des Bogens E B die senkrechte Linie auf E M oder E D herabläßt (§. 38). Wenn man aber aus dem anderen Endpunkt E die Stellvertretungslinien untersuchet, so ist E P die Schoslinie, E Q die Berührlinie, M Q die Schneidlinie des Nebenwinkels E M B; nun E P = B F, E Q = D L, und M Q = M L, weil die Dreieke EPM, BMF, und EQM, DLM vermöge der gleichen Seiten E M und M D (§. 16), und des Scheitelwinkels M nebst dem rechten Winkeln einander gleich sind (§. 122).

317. **Folger.** Wenn demnach die Schoslinie oder Berührlinie eines Winkels gegeben ist, ist nothwendig zuwissen, ob solcher Winkel scharf, oder stumpf sei, um daraus dessen Ersetzungswinkel zufinden.

318. **Lehrs.** Die Schoslinie B C (Fig. 102) eines Winkels B A D oder Bogens B D ist die Helfte der Sehne B E, welche einen doppelten Bogen B D E solchen Winkels oder Bogens abschneidet.

Beweis. Denn, wenn man B C bis E verlängert, so ist die Sehne B E doppelt so groß, als die Schoslinie B C, und der Bogen B D E ist doppelt so groß, als der Bogen B D (§. 73), der den Winkel B A D messet (§. 25).

319. **Folger.** Die halben Seiten eines Dreiekes gleichen demnach den Schoslinien der

entsprechenden Winkel. Denn, wenn um das Dreiek ein Umkreis beschrieben wird, schneidet jede Seite einen doppelten Bogen desjenigen ab, der den gegenüberstehenden Winkel messet (§. 90).

320. **Folger.** Die Schoslinie des Winkels oder Bogens von 30° gleichet dem halben Halbmesser. Denn, wenn der Bogen BD (Fig. 102) 30° enthält, so enthält der doppelte Bogen BDE 60°, und derowegen gleichet dessen Sehne BE dem Halbmesser (§. 173); nun BC = ½ BE (§. 318).

321. **Erklär..** Jener scharfe Winkel, welcher einem anderen scharfen Winkel zu einem rechten ermanglet, oder mit welchem ein stumpfer einen rechten übertrift, heißt dessen Ergänzung- oder Ergänzungswinkel (complementum), und zwar im ersten Fall Ergänzung **durch Mangel** (complementum per defectum): im zweiten Ergänzung **durch Ueberschuß** (complementum per excessum). So ist z. B. der Winkel AMB (Fig. 103) in Ansehung des Winkels BMD (und umgekehrt) die Ergänzung durch Mangel, weil AMB zu BMD hinzugegeben einen rechten Winkel AMD ausmacht; eben solcher scharfe Winkel AMB ist in Rüksicht des stumpfen EMB die Ergänzung durch Ueberschuß, weil AMB von EMB hinweggenommen einen rechten Winkel EMA hervorbringt (Wenn Ergänzung ohne Beisaz erwehnet wird, versteht sich allzeit Ergänzung durch Mangel). Die Schoslinie BC des Ergänzungswinkels AMB heißt in Rüksicht des Winkels

kels B M D, dessen Ergänzung er ist, Ergänzungsscholinie (sinus complementi, vel cosinus). Gleichermassen heissen die Berührlinie A H Ergänzungsberührlinie (cotangens): die Schneidlinie MH Ergänzungsschneidlinie (cosecans): und die verkehrte Scholinie AC verkehrte Ergänzungsscholinie (cosinus versus).

322. Folger. Die Ergänzungsscholinie BC gleichet demnach dem Unterscheid GM zwischen der verkehrten Scholinie GD und dem Halbmesser oder Schenkel MD. Denn, weil BC, BG, MD, MA gegeneinander senkrecht sind, ist BC MG ein gleichlaufendes Rechtek, folglich BC=GM (§. 151).

323. Lehrs. Wenn im rechtwinklichten Dreiek 1) die eine der Minderseiten für den Halbmesser angenommen wird, so ist die andere die Berührlinie des entgegengesezten Winkels; wird aber 2) die Großseite zum Halbmesser gewählet, so ist die eine der zween Minderseiten die Scholinie des entgegengesezten Winkels, und die andere die Ergänzungsscholinie desselben.

Beweis. Man beschreibe mit AC (Fig. 104)) aus A den Bogen CD, so erhellet alsogleich, daß CB die Berührlinie des entgegengesezten Winkels A sei; gleichergestalt wird AC die Berührlinie des Winkels B, wenn man aus B mit BC den Bogen CE bestreichet (§. 311). Beschreibet man aber mit AB aus A den Bogen BF, so ist BC die Scholinie des Winkels A, und

A C dessen Ergänzungsschoslinie (§. 321); umgekehrtermassen wird A C die Schoslinie des Winkels B, und B C wird dessen Ergänzungsschoslinie, wenn man aus B mit B A den Bogen A G bestreichet.

324. Folger. Die Berührlinie C B eines Winkels B A C oder dessen Bogens C D von 45° gleichet dem Halbmesser A C. Denn, wenn der Winkel A 45° enthält, eignet sich auch B eben soviele zu (§. 129), folglich C B = A C (§. 135).

325. Lehrs. Die Seiten eines jeden Dreiekes verhalten sich wie die Schoslinien der entgegengesezten Winkel.

Beweis. Die ganzen Seiten verhalten sich, wie die halben Seiten (Alg. 225, 227); nun die halben Seiten sind die Schoslinien der entgegengesezten Winkel (§. 319), also.

Anmerk. Die bisherigen Gründe sind hinreichend jedes Dreiek, dessen zwei Winkel und eine Seite, oder zwei Seiten und ein entgegengesezter Winkel bekant sind, aufzulösen, wie es die Folge zeigen wird. Soferne aber in einem schiefen Dreiek alle drei Seiten ohne Winkel, oder zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel angegeben sind, werden zur Auflösung desselbigen annoch folgende zwei Lehrsätze erheischet.

326. Lehrs. Wenn man auf die größte

Seite

Seite B C (Fig. 105) eines Dreiekes A B C aus dem entsprechenden Winkel A eine senkrechte Linie A E fället, so verhält sich die ganze größte Seite B C zur Summe der übrigen zween Seiten AB+AC gleichwie der Unterscheid eben solcher zween Seiten A B — A C zum Unterscheid der Stüke der größten Seite B E — E C.

Beweis. Man beschreibe aus A mit A C einen Umkreis, und verlängere die Seite B A bis D, so ist B C : B D = B G : B F (§. 195); nun B C ist die größte Seite; B D ist die Summe von A B und A C vermöge A C = A D (§. 16); B G ist derer Unterscheid; denn dieser ist = A B — A C = A B — A G = B G; B F ist der Unterscheid der Stüke der größten Seite; denn er ist B E — E C (vermöge E C = C F nach §. 73) = B E — E F = B F.

327. **Folger.** Sintemal aus der Voraussezung alle drei Seiten des Dreiekes bekant sind, wird in der vorerwehnten Verhältnißgleichung das vierte Glied oder der Unterscheid B F bestimmet (Alg. §. 255). Wenn man demnach B F von B C abzieht, und den Ueberrest F C mit 2 theilet, folget E C bekant; folglich läßt sich im rechtwinklichten Dreiek A E C, in welchen nebst dem rechten Winkel zwei Seiten A C und E C bekant sind, der Winkel C, der dem △ A B C gemein ist, bestimmen, und derowegen das △ A B C ferner gänzlich auflösen.

Anmerk. 1. Soferne A B = A C, ist auch

BE = EC (§. 39), folglich kan ohne weiteren alsogleich das △ AEC in Rüksicht des Winkels C (oder das △ AEB in Rüksicht B), und sodan das △ ABC aufgelöset werden.

Anmerk. 2. Wir haben in der Algebra §. 193 im sechsten Beispiel der Aufgaben gezeiget, 1) daß aus zween gegebnen ungleichen Grössen die grössere der halben Summe mehr dem halben Unterscheid: die kleinere aber der halben Summe weniger dem halben Unterscheid derselben gleiche; nun wollen wir noch hiezu erinneren 2), daß dererselben halbe Unterscheid gleich sei der halben Summe weniger der kleineren Grösse. Denn die grössere Grösse sei x: die kleinere y, so ist ihr halber Unterscheid $\frac{x-y}{2}$, und ihre halbe Summe weniger die kleinere Grösse ist $\frac{x+y}{2} - y$; nun $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} - y$ (diese Seite der Gleichung in einen reinen Bruch verwandlet, und dan zurechtgerichtet) $= \frac{x-y}{2}$.

328. Lehrs. In jedem Dreiek ABC (Fig. 106) verhaltet sich die Summe jeder zween Seiten AB + AC zu dem Unterscheid dererselben AB — AC, gleichwie die Berührlinie der halben Summe der zween Winkel B und C, die solchen Seiten gegenüberstehen, zu der Berührlinio des halben Unterscheides eben solcher zween Winkel.

Beweis. Man beschreibe mit AC einen Umkreis, und verlängere BA bis F, alsdan ziehe

man

man FE aus F durch C, ferner die Sehne DC, und zu dieser durch B die gleichlaufende BE, so ist DCF ein rechter Winkel (§. 92), wie dan auch BEF (§. 60); folglich sind DCF und BEF rechtwinklichte Dreieke. Dies vorausgesezt, bestehet: BF : BD = EF : EC (§. 179); nun 1) BF gleichet der Summe der gegebnen Seiten AB + AC vermöge AC = AF (§. 16). 2) BD ist der Unterscheid solcher Seiten, denn AB — AC = AB — AD = BD. 3) EF ist die Berührlinie von der Summe der zween Winkel B und C im Dreiek ABC; denn EF ist die Berührlinie vom Winkel FBE (§. 323. N. 1), und der Winkel FBE ist die halbe Summe von B und C im △ ABC; denn der Winkel FBE = FDC (§. 60) = $\frac{1}{2}$ FAC (§. 91): und FAC = B + C (§. 142). 4) EC ist die Berührlinie vom Winkel CBE (§. 323. N. 1), und CBE ist der halbe Unterschied von B und C; denn, wenn man den kleineren Winkel B oder FBC von dem Winkel FBE, welcher die halbe Summe vom B und C enthält, abzieht, bleibet CBE (§. 327. Anmerk. 2.).

329. **Folger.** Wenn man den halben Unterscheid der zween Winkel B und C zu derselben halben Summe hinzugiebt, wird der grössere Winkel C bekant, zieht man aber den halben Unterscheid von solcher halben Summe ab, erhält man den kleineren Winkel B, und das Dreiek ABC kan sodan vermög hinlänglicher bekanten Stüke gänzlich aufgelöset werden (§. 327. Anmerk. 2.)

An=

Anmerk. Da das Maß der Seiten der Dreieke in Zahlen angegeben wird, müssen auch die Stellvertretungslinien der Winkel in Zahlen ausgedrüket, und bestimmet werden, um die Dreieke hierorts aufzulösen. Um dies zu bewerkstelligen, dienen folgende Säze.

330. Lehrs. Es möge ein Bogen aus dem Scheitel eines Winkels A (Fig. 107) mit kleinerem oder grösserem Halbmesser AB, AD (u. s. w.) beschrieben werden, so verhalten sich stets die Stellvertretungslinien solchen Bogens oder Winkels eben so, wie der Halbmesser.

Beweis. Denn die Dreieke ABG, AFC, ADI, AHE sind einander ähnlich (§. 120), folglich ist BG : AB = DI : AD (§. 185), so auch FC : AC = HE : AE, nicht minder die Ergänzungsschoslinien AG : AB = AI : AD u. s. w.

331. Folger. Wenn man demnach den Halbmesser als eine Einheit von einer Menge gleicher Theilchen ansieht, so enthält eine jede der Stellvertretungslinien eine verhältnißmässige Anzahl davon.

332. Willkühr. Der Halbmesser, er möge kleiner oder grösser sein, sei in 10000000 gleiche Theilchen getheilt.

333. Folger. Einer jeden stellvertretenden Linie eines Winkels oder Bogens, so wie dem angehörigen

gehörigen Winkel oder Bogen selbst, kommt eine gewisse verhältnißmässige Anzahl solcher Theilchen zu. Eben in diesem Anbetracht beruhet der Grund statt der Winkel ihre stellvertretende Linien anzusetzen.

334. **Folger.** Eine stellvertretende Linie eines Winkels untersuchen ist demnach nichts anderes, als untersuchen, wieviele derlei Theilchen des Halbmessers solche stellvertretende Linie enthalte.

Anmerk. Die vorhergehenden Gründe darstellen uns den Weg und die Art die Stellvertretungslinien zubestimmen. Allein zur Verkürzung und Beschleinigung der Rechnungen wäre es nöthig eine Tabelle zubereiten, welche für eine jede Stellvertretungslinie der Winkel von 1 bis 90 Grade nebst den Minuten die angehörige verhältnißmässige Anzahl solcher Theilchen, deren 10000000 dem Halbmesser zugeeignet werden, enthalte. Von 1 bis 90 Grade sage ich; denn nach 90 Grade folgen abermal die vorigen Stellvertretungslinien, wie es aus §. 311 zuentnehmen ist. Zur Zubereitung solcher Tabelle, **Tabelle der Stellvertretungslinien** (Tabula sinuum, canon functionum) haben **Neper, Brig**, und **Ulak** die ersten Hand angeleget (Alg. §. 318. Anmerk). Die Ulakische Stellvertretungslinientabelle, welche wir vor allen anderen erwegen wollen, bestehet aus sechs Reihen: in der ersten sind die Grade und ersten Minuten der Winkel: in der zweiten die entsprechenden Schoslinien: in der dritten die Berührlinien: in der vierten die Schneidlinien: in der

fünf-

fünften die angehörigen Verhältnißzahlen der Schoslinien: in der sechsten die Verhältnißzahlen der Berührlinien. Die Verhältnißzahlen der Schneidlinien sind hinweggelassen worden (gleiches könte mit den Schneidlinien selbst, wovon wir derowegen bishero nichts sonderheitlich gesprochen haben, geschehen), weil man ihrer entbehren kan. Ferner ist solche Tabelle dergestalt eingerichtet, daß sich auf einer und derselben Seite zwoer nächsten Blätter die scharfen Winkel mit ihren Stellvertretungslinien samt derer Verhältnißzahlen links, die Ergänzungen dererselben aber gerade gegenüber rechts (oder umgekehrt) befinden. Gleichwie die Winkel links von 0 bis 45° stufenweis wachsen, eben so nehmen sie rechts von 90° bis 45° ab, damit sie sich stets zu einem rechten Winkel ergänzen. Wir haben uns nur den Gebrauch davon wohl bekant zu machen. Zur Ausübung einer so wichtigen und schönen Wissenschaft die Dreieke aufzulösen, fügen wir am Ende des gegenwärtigen Bandes eine Tabelle der Stellvertretungslinien der Winkel von 1 bis 90 Grade nebst jeder zehenden Minute bei.

335. Aufg. Die Stellvertretungslinien eines gegebnen Winkels in der Tabelle aufzusuchen.

Auflös. 1) Wenn der gegebne Winkel einen rechten nicht übersteiget, so suche man ihn (das ist, dessen gegebne Grade) in der ersten Reihe der linken oder rechten Seite zwoer nächster Blätter, jenach er unter oder über 45° ist, so entspricht gerade darneben in der zweiten Reihe die angehö-

rige

rige Schoslinie, in der dritten Reihe die Berührlinie, sodan die angehörigen Verhältnißzahlen: gerade gegenüber aber in der ersten Reihe entspricht die Ergänzung des gegebnen Winkels, sodan die Ergänzungsstellvertretungslinien, und derer Verhältnißzahlen.

2) Ist der gegebne Winkel stumpf, so ziehe man ihn von 180° ab um dessen Nebenwinkel zuerhalten; man suche sodan solchen Nebenwinkel auf vorige Art in der Tabelle, so findet man die anverlangten Stellvertretungslinien (§. 316). Z. B. Man verlange die Schoslinie eines Winkels von 125°. Man ziehe 125° von 180° ab, und suche zum Rest 55° die Schoslinie, welche 8191521 ist, und zugleich dem Winkel von 125° entspricht.

3) Weil in unserer Tabelle, welche am Ende dieses Buches folget, bei den Graden nur jede zehende Minute enthalten ist, um auch für die übrigen entzwischenden Minuten, die darinnen nicht vorkommen, die angehörigen Stellvertretungslinien zufinden, hat man auf folgende Art zuverfahren. Man suche nemlich in der Tabelle den nächst grösseren und nächst kleineren Winkel, als der gegebne ist, und ziehe sowohl den nächst kleineren Winkel von dem nächst grösseren Winkel, als auch die Schoslinie des nächst kleineren Winkels von der Schoslinie des nächst grösseren ab; alsdan ziehe man den nächst kleineren Winkel auch von dem gegebnen ab, und stelle diese Verhältnißgleichung auf: gleichwie sich der erste Unterscheid zum zweiten verhält, eben so verhält sich der dritte zu jenem, womit die Schoslinie des nächst kleineren

Win-

Winkels in der Tabelle die Schoslinie des gegebnen übertrift. Wenn man nun den vierten gefundenen Unterscheid zu der Schoslinie des nächst kleineren Winkels hinzugiebt, erhält man die verlangte Schoslinie (eben dies versteht sich auch von der Berührlinie).

Z. B. Man verlange die Schoslinie des Winkels 60° 24', welcher in unserer Tabelle nicht vorhanden ist. Derowegen 1) ziehe man den nächst kleineren Winkel 60° 20' (in der Tabelle) von dem nächst grösseren 60° 30' ab, so ist der Unterscheid davon 10'. 2) Man ziehe auch die Schoslinie 8689196 des nächst kleineren Winkels 60° 20' von der Schoslinie 8703557 des nächst grösseren Winkels 60° 30' ab, so erhält man den Unterscheid 14361. 3) Man ziehe den nächst kleineren Winkel 60° 20' von dem gegebnen 60° 24' ab, so erfolgt der Unterscheid 4'. Man ordne sodan 4) solche drei Unterscheide in eine Verhältnißgleichung: $10 : 14361 = 4 : x$, woraus $x = 5744 \frac{4}{10}$ (Alg. §. 255.). Wenn man nun 5744 (ohne den Bruch) zu der kleineren Schoslinie hinzugiebt $8689196 + 5744$, erhält man die Schoslinie 8694940, welche dem gegebnen Winkel 60° 24' am nächsten entspricht, wessen man sich überzeugt, wenn man sie sodan in einer Stellvertretungslinientabelle, in welcher alle Minuten enthalten sind, aufsucht.

336. Folger. Auf ähnliche Art, wie §. 335. N. 3. hat man auch die Verhältnißzahl der diesfälligen Schoslinie, oder Berührlinie zu untersuchen.

337. Aufg.

337. Aufg. Den angehörigen Winkel einer gegebnen Stellvertretungslinie in der Tabelle aufzusuchen.

Auflös. 1) Man suche die gegebne Stellvertretungslinie in der Tabelle in der gehörigen Reihe auf, so entspricht ihr in der ersten Reihe der verlangte Winkel, so wie in der vorlezten oder lezten Reihe die angehörige Verhältnißzahl.

2) Sollte sich die gegebne Stellvertretungslinie nicht, wohl aber grössere und kleinere, als sie ist, in der Tabelle befinden, so enthält der angehörige Winkel ausser Graden auch Minuten (von Sekunden, weil wir hier keinen Gebrauch davon machen, ist die Rede nicht), die in unserer Tabelle nicht vorkommen, und man hat solchen Winkel mittelst einer Verhältnißgleichung, wie §. 335. zuuntersuchen.

Z. B. Es werde der Winkel der gegebnen Schoslinie 62615.03, welche in unserer Tabelle nicht enthalten ist, verlanget. Man ziehe demnach die nächst kleinere Schoslinie 62478.85 von der nächst grösseren 62705.71 ab, und merke den Unterscheid 22686 davon auf; eben so ziehe man auch den Winkel 38° 40', welcher der nächst kleineren Schoslinie entspricht, von dem Winkel 38° 50', welcher der nächst grösseren Schoslinie entspricht, ab, und merke den Unterscheid 10'. Ferner ziehe man die nächst kleinere Schoslinie auch von der gegebnen Schoslinie ab um den Unterscheid 13618 zuerhalten, und setze diese Verhältnißgleichung auf: $22686 : 10 = 13618 : x$, woraus $x = 6'$ (ohne dem unbeträchtlichen Bruch).

Wenn man nun 6' zu dem nächst kleineren Winkel 38° 40' hinzugiebt, erhält man den gesuchten Winkel 38° 46'.

338. Folger. Gleichergestalt kan aus einer gegebnen Verhaltnißzahl, welche sich in der Tabelle nicht befindet, die angehörige Stellvertretungslinie oder ihr Winkel gefunden werden.

II. Kapitel.

Von der Auflösung der Dreieke

339. Erklär. Die Winkel, welche den Seiten im Dreiek entsprechen, heissen entgegengesezte Winkel in Ansehung der entsprechenden Seiten, und umgekehrt. Wenn sich unter den gegebnen Stüken eines Dreiekes zwei Seiten mit einem entsprechenden Winkel oder zwei Winkel mit einer Seite befinden, so giebt es im aufzulösenden Dreiek eine Entgegensetzung (oppositio), und das ganze Dreiek kan alsogleich mittelst Verhältnißgleichungen durch Entgegensetzung der Seiten, und der Stellvertretungslinien der entsprechenden Winkel (§. 309, 325) ohne weiteren Rechnungen aufgelöset werden. Aber obwohlen unter den gegebnen dreien Stüken eine solche Entgegensetzung nicht allzeit vorhanden ist, so kan sie doch daraus durch Rechnungen gefunden, und sodan die gänzliche Auflösung des Dreiekes bethätiget werden, wie wir es bald ersehen werden.

340. Heisch. Um die gegebnen und die zusuchenden Theile eines aufzulösenden Dreiekes gemächlich zuunterscheiden, können dieselben mit einem Linichen, diese aber mit einer Nulle bezeichnet werden, wie in der 110 Bildniß zusehen.

Anmerk. 1. Im rechtwinklichten Dreiek ist allzeit ein Winkel, nemlich der rechte bekant, obschon solcher nicht ausdrüklich angegeben wird. Wenn aber in einem Dreiek zwei Winkel gegeben sind, so ist auch der dritte als gegeben anzusehen, indeme er bloß durch Abzug der zween gegebenen aus 180° bekant wird (§. 131).

Anmerk. 2. Um die Auflösung der Dreieke wohl und ordentlich zuunternehmen, wollen wir die gegebnen Theile dermassen in eine Verhältnißgleichung aufstellen, daß das gesuchte Stük allzeit an die vierte Stelle zustehen komme. Der Hauptfälle, die sich unter den gegebnen Stüken ereignen können, sind überhaupt dreie: Es können nemlich 1) zwei Winkel mit einer Seite: oder 2) zwei Seiten mit einem Winkel: oder 3) alle drei Seiten ohne Winkel gegeben werden. Bloß drei Winkel ohne Seite sind zur Auflösung des Dreiekes nicht hinlänglich. Wir werden unsere Aufmerksamkeit insbesondere erstlich auf die Auflösung der rechtwinklichten, alsdan auf jene der schiefwinklichten Dreieke richten.

341. Aufg. Ein rechtwinklichtes Dreiek, dessen zwei Winkel, und eine Seite gegeben sind, aufzulösen.

Auflös. Weil vermöge der zween gegebnen Winkel auch der dritte bekant ist (§. 131), so giebt es zwischen den gegebnen und gesuchten Stüken eine vollkommene Entgegensezung (§. 339); man ordne demnach die gegebnen mit dem gesuchten Stük durch Entgegensezung in eine Verhältnißgleichung, so läßt sich das gesuchte alsogleich finden (Alg. §. 255).

Z. B. Es seie (Fig. 108) die Seite AB und der Winkel A nebst dem rechten B gegeben, man verlange die Seite AC, so besteht diese Verhältnißgleichung: Die Schoslinie des Winkels C verhält sich zu der entgegengesezten Seite AB, gleichwie die Schoslinie des Winkels B zu der entgegengesezten Seite AC (§. 325). In dieser Verhältnißgleichung sind die ersten drei Glieder bekant, folglich wird auch das vierte daraus bekant.

Anmerk. 1. In Rechnungen kan der Kürze halber die Schoslinie durch Sch. oder S., die Großschoslinie durch Grs., die Ergänzungsschoslinie durch Erg., die Ersezungsschoslinie durch Ers. die Berührlinie durch Ber. oder B. und Verhältißzahl durch Verh. angedeutet werden, z.B. S. C heißt die Schoslinie des Winkels C, Ber. A die Berührlinie von A, Verh. Sch. C die Verhältnißzahl der Schoslinie vom Winkel C, u. s. w.

Anmerk. 2. Es dürfte den Anfängern nicht weniger angenehm als vortheilhaft sein einige Aufgaben hierorts in Zahlen bestimmen zusehen. Derowegen sei im rechtwinklichten Dreiek ABC (Fig. 108) die Seite AB, und der Winkel C nebst dem rechten B gegeben, man suche BC,

so ist

so ist: Sch. C : AB = Sch. A : BC. Es sei AB = 124°, C = 50° 40', so ist A = 39° 20' (§. 129), und die vorige Verhältnißgleichung ist: Sch. 50° 40' : 124° = Sch. 39° 20' : BC. Die angehörigen Schoslinien aus der Stellvertretungslinientabelle ansetzend, ist 7734716 : 124 = 6338309 : BC. Hieraus würde man BC finden (Alg. §. 255); aber man bedient sich der Verhältnißzahlen in derlei Fällen, um die sonst weitläufigen Vervielfältigungen und Theilungen zuvermeiden. Wenn man demnach solche (zu den Schoslinien in der Stellvertretungslinientabelle zu 124° aber in der Verhältnißzahlentabelle) aufsuchet, so ist: 9.8884444 : 2.0934217 = 9.8019735 : BC, hieraus BC + 9.8884444 = (2.0934217 + 9.8019735 =) 11.8953952, und BC = 11.8953952 — 9.8884444 = 2.0069508 (Alg. §. 309). Wenn man nun diese lezte Verhältnißzahl unter den Verhältnißzahlen der natürlichen Zahlen aufsuchet, findet man die Seite BC. Weil aber diese Verhältnißzahl in der Tabelle nicht vorhanden ist, wohl aber grössere und kleinere, so enthält die gesuchte Seite nebst einer ganzen Zahl noch einige Theile einer Klafter, um also solche Theile zufinden, befolge man die in der Algebra §. 327 gegebne Leitung, so erhält man einen zehntheiligen Bruch 0,614 (nur die Tausendtheilchen beibehaltend, die übrigen hinweglassend), welcher zu der ganzen Zahl 101, die in der Verhältnißzahlentabelle der nächst kleineren Verhältnißzahl entspricht, hinzugegeben die Länge der gesuchten Seite BC am nächsten bestimmet, nemlich 101, 614°.

342. Aufg. Ein rechtwinklichtes Dreiek, dessen zwei Seiten nebst dem rechten Winkel gegeben sind, aufzulösen.

Auflös. Die gegebnen zwei Seiten schliessen entweder den rechten Winkel ein, oder eine derenselben ist ihm entgegengesezt. Ist eine der gegebnen Seiten dem rechten Winkel entgegengesezt, so wird das Dreiek alsogleich eben so, wie in der vorhergehenden Aufgabe, durch Entgegensetzung aufgelöset. Z. B. Es seien die Seiten AB und AC (Fig. 108) gegeben, man verlange den Winkel C; so bestehet: Gleichwie sich AC zu der Schoslinie des Winkels B, das ist, zu der Großschoslinie verhält, eben so verhält sich AB zu der Schoslinie des Winkels C.

Schliessen aber die gegebnen Seiten den rechten Winkel ein, das ist, sind aber die zwei Minderseiten gegeben, so wähle man die eine zum Halbmesser, damit die andere zugleich die Berührlinie des entgegengesezten Winkels vorstelle, und alsdan ordne man sie unter solcher doppelten Bedeutung in eine gehörige Verhältnißgleichung,

Z. B. Man verlange den Winkel C, da die beiden Minderseiten AB, BC gegeben sind. Man wähle demnach die dem gesuchten Winkel C anliegende Seite CB zum Halbmesser oder Großschoslinie, so ist BA zugleich die Berührlinie des entgegengesezten gesuchten Winkels C (§. 323), folglich ist BC : Grs. = AB : Ber. C. Hieraus findet man die Berührlinie des Winkels C, und sodan mittelst dieser in der Stellvertretungslinientabelle den Winkel selbst (§. 337).

An-

Anmerk. Wie eine Seite eines Dreiekes in Zahlen bestimmet werde, erhellet aus §. 341. Anmerk. 2; nun wollen wir auch einen Winkel bestimmen. Es sei (Fig. 108) AB = 150°, AC = 200° nebst dem rechten Winkel B gegeben, man verlange C, so ist AC: Grs. (oder Halbmesser §. 313, 332) = AB: Sch. C, das ist, 200°: 10000000 = 150°: Sch. C, sodan die angehörigen Verhältnißzahlen ansetzend: 2.3010300 : 10.0000000 = 2.1760913: Verh. Sch. C. Hieraus (die Summe der äusseren und mitleren Glieder) Verh. Sch. C + 2.3010300 = 12.1760913, und Verh. Sch. C = 12.1760913 — 2.3010300 = 9.8750613. Wenn man nun diese Verhältnißzahl in der Stellvertretungslinientabelle unter den Verhältnißzahlen der Schoslinien aufsuchet, findet man in der ersten Reihe den entsprechenden Winkel. Allein man findet sie in unserer Stellvertretungslinientabelle nicht gänzlich, wohl aber zwei nächste, wovon die eine grösser, und die andere kleiner ist. Dies zeiget an, daß dem gesuchten Winkel nebst Graden auch einige Minuten, die in solcher Tabelle nicht enthalten sind (denn nur jede zehende Minute ist darinnen enthalten §. 334 Anmerk.) zukommen. Um also mittelst solcher Tabelle die angehörigen Minuten zubestimmen, ziehe man von der nächst grösseren Verhältnißzahl 9.8755706 die nächst kleinere 9.8744561 ab, und merke den Unterscheid 11145, gleichergestalt ziehe man auch vom angehörigen nächst grösseren Winkel 48° 40' den nächst kleineren 48° 30' ab, und merke den Unterscheid, der allzeit 10 Minuten beträgt, sodan ziehe man

die nächst kleinere Verhältnißzahl auch von der bekanten 9.8750613 ab, um den Unterscheid 6052 davon zuerhalten, und setze 11145 : 10' = 6052 : x. Hieraus 11145x = 60520, und x = 5' (den Ueberrest 4795, woraus sonst die angehörigen Sekunden zubestimmen wären, vernachlässigend). Wenn man nun 5' zu dem nächst kleineren Winkel hinzugiebt, erfolget der gesuchte Winkel C = 48° 35'. Aus C wird auch A bekant = 41° 25' (§. 129). Daferne im Dreiek A B C, in welchem A B, A C, nebst B bekant sind, B C verlanget würde, so muß vorhero C, und dan daraus A (wie erst geschehen) gefunden werden, um B C durch Entgegensetzung folgendermassen bestimmen zukönnen: Grs: A C = Sch. A: B C, oder 10000000: 200° = Sch. 41° 25': B C. Um die angehörigen Verhältnißzahlen anzusetzen, muß man zu 41° 25' aus unserer Stellvertretungslinientabelle die Verhältnißzahl auf diese Art suchen: Man ziehe den nächst kleineren Winkel 41° 20' sowohl von dem nächst grösseren 41°, 30', als auch von 41° 25' ab, und merke sowohl den ersten Unterscheid 10', als auch den zweiten 5', alsdan ziehe man auch die nächst kleinere Verhältnißzahl 9.8198325 von der nächst grösseren 9.8212646 ab, um den Unterscheid 14321 zuerhalten, und setze: 10' : 14321 = 5' : x, woraus x beinahe = 7160. Giebt man nun 7160 zu der nächst kleineren Verhältnißzahl hinzu; so erhält man die Verhältnißzahl 9.8205485 von 41° 25', und die obige Verhältnißgleichung übergeht in diese: Verh. 10.0000000: Verh. 2.3010300 = Verh. 9.8205485: Verh. BC. Hieraus (von der

der Summe der mitleren das erste Glied abgezogen) Verh. BC = 2.1215785. Da aber diese Verhältnißzahl unter den Verhältnißzahlen der natürlichen Zahlen nicht vorkömt, wohl aber kleinere und grössere, so findet man gemäß §. 341 Anmerk. 2, und in der Algebra gemäß §. 327 die Seite BC = 132, 306 beinahe. Gegenwärtige Anmerkung setzet den Anfänger in Stande die Dreieke mittelst unserer Stellvertretungslinientabelle aufzulösen, obschon nur die zehenden Minuten darinnen enthalten sind. Zu höheren Rechnungen in welchen eine besondere Genauigkeit und Schärfe erheischet wird, muß eine Tabelle, in welcher nebst den Minuten auch die Sekunden vorkommen, bei Händen sein.

343. Aufg. Ein schiefwinklichtes Dreiek, dessen zwei Winkel, und eine Seite, oder zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, aufzulösen.

Auflös. Im ersten Fall wird das schiefe Dreiek eben so, wie das rechtwinklichte (nach §. 341) durch Entgegensetzung alsogleich ohne weiterer Rechnung aufgelöset. Im zweiten Fall aber ist zusehen, ob der gegebne Winkel einer der gegebnen Seiten entgegengesezet, oder ob er zwischen den zween gegebnen Seiten enthalten sei: ist er einer der gegebnen Seiten entgegengesetzet, so kan das Dreiek auch ohne weiteren durch Entgegensetzung (nach §. 342) bestimmet werden. Ist er aber zwischen den zween Seiten enthalten, so muß vorhero ein Winkel, welcher einer dererselben entgegengesetzet ist, durch weitere Rechnung (nach §. 328) gesucht

sucht werden um die Auflösung des Dreiekes durch Entgegensetzung vollziehen zukönnen.

Z. B. Es werde (Fig. 109) AC verlanget, da AB, BC, und B gegeben sind. Man suche demnach vorhero den Winkel A oder C, welches durch folgende Rechnung geschieht. 1) Man ziehe den gegebnen Winkel B von 180° ab, so wird die Summe der übrigen zween A und C bekant (§. 130): 2) man theile diese Summe mit 2, so erhält man den Winkel, welcher der halben Summe von A und C gleichet: 3) man suche in der Stellvertretungslinientabelle zu solchem Winkel die angehörige Berührlinie, und sage: Gleichwie sich AB + BC zu AB — BC verhält, eben so verhält sich die Berührlinie von $\frac{A + C}{2}$ zu der Berührlinie von $\frac{C - A}{2}$. Hieraus wird die Berührlinie des halben Unterscheides der zween unbekanten Winkel gefunden. Zu eben dieser Berührlinie suche man in der Stellvertretungslinientabelle den angehörigen Winkel, und giebe ihn zu der halben Summe der zween unbekanten Winkel, so wird der grössere C davon bekant (§. 329), und die Seite AC kan sodan hiedurch gefunden werden: Sch. A : BC = Sch. B : AC (§. 325).

Anmerk. Es ist zwar allfällig richtig, daß, wenn in einem schiefwinklichten Dreiek z. B. ABC (Fig. 110) zwei Seiten AB, AC mit einem entgegengesezten Winkel B gegeben sind, alsogleich auch der andere entgegengesezte durch Entgegensetzung bestimmet werde; aber es ist hiezu nothwendig annebst zuwissen, ob der gesuchte Winkel

kel scharf oder stumpf sei. Denn die zwei gegebnen Seiten AB, AC können sich entweder in einem stumpfwinklichten Dreiek ABC, oder in einem scharfwinklichten ABD (massen AC = AD) befinden. Würde man nun (ohne zuuntersuchen, ob der verlangte Winkel stumpf sein müsse) sezen: AC verhält sich zu der Schoslinie des Winkels B, gleichwie AB zu der Schoslinie des verlangten Winkels, so würde man mittelst dieser lezten Schoslinie in der Tabelle, in welcher kein stumpfer Winkel enthalten ist, nicht den stumpfen Winkel o, sondern den scharfen D finden. Ist aber bewust, daß der verlangte Winkel stumpf sei, so wird er gefunden, wenn der erst bestimte D, welcher dem Winkel n, als der Ersezung von o gleichet (§. 135, 315—6), von 180° abgezogen wird.

344. Aufg. Ein schiefwinklichtes Dreiek, dessen alle drei Seiten ohne Winkel gegeben sind, aufzulösen.

Auflös. Man suche vorhero durch weitere Rechnung (gemäß §. 326, und folgend.) einen Winkel, so kan alsdan das ganze Dreiek durch Entgegensezung bestimmet werden.

Z. B. Es werde im △ ABC (Fig. *111*), dessen bloß alle drei Seiten gegeben sind, der Winkel A verlanget. Man stelle sich aus B zu AC eine senkrecht gezogene Linie BD vor, und suche (nach §. 326) DC, so sind im △ BDC nebst dem rechten Winkel die Seiten BC, DC bekant, folglich wird m hiedurch bestimmet: BC : Grs. =

DC: Sch. m. Da nun im △ BDC auch C bekant ist, wird A folgendermassen gefunden: BA: Sch. C = BC: Sch. A.

Anmerk. Wir wollen zu Gunsten der Lernenden die einzelnen Fälle eines aufzulösenden Dreiekes in Erwegung nehmen, und ihre Auflösung durch folgende Verhältnißgleichungen darstellen, um sie gleichsam in einem Anblick sämtlich übersehen zukönnen.

Rechtwinklichtes Dreiek (108 Bildniß):

gegeben,	gesucht,	aufgelöset,
A, B, AB	C	wird aus A und B bekant.
	BC	S. C: AB = S. A: BC.
	AC	S. C: AB = Grs: AC.
B, C, AC	A	wird aus B und C bekant.
	AB	Grs: AC = S. C: AB.
	BC	Grs.: AC = S. A: BC.
A, B, BC	C	wird wie vorhero bekant.
	AB	S. A: BC = S. C: AB.
	AC	S. A: BC = Grs.: AC.
AB, AC, B	C	AC: Grs. = AB: S. C.
	A	wird bekant, nachdem C bestimt ist.
	BC	Grs.: AC = S. A: BC.
BC, AC, B	A	AC: Grs. = BC: S. A.
	C	wird bekant, nachdeme A bekant.
	AB	Grs. AC = S. C: AB.
AB, BC, B	A	AB: Grs. = BC: Ber. A.
	C	BC: Grs. = AB: B. C.
	AC	S. C: AB = Grs. AC.

Schiefwinklichtes Dreiek (109 Bildniß):

gegeben,	gesucht,	aufgelöset,
A, B, AB	C	wird aus A und B bekant.
	AC	S.C: AB = S.B: AC.
	BC	S.C: AB = S.A: BC.
AB, AC, B	C	AC: S.B = AB: S.C.
	A	wird bekant, nachdem C bestimt ist.
	BC	S.B: AC = S.A: BC.
AB, AC, A	C	AB + AC: AB − AC = Ber. $\frac{B+C}{2}$: Ber. $\frac{C-B}{2}$ der Winkel des halben Unterscheides $\frac{C-B}{2}$ zur halben Summe $\frac{B+C}{2}$ hinzugegeben bestimmet den Winkel C,
	B	davon abgezogen bestimmet den Winkel B.
	BC	S.B: AC = S.A: BC.

Wenn alle drei Seiten ohne Winkel gegeben sind, sehe man füglicher §. 344, 326, 327.

Tabelle
der
Stellvertretenden Linien
der Winkel von 1 bis 90 Grade nebst
den zehenden Minuten.

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinien	Verhältnißzahl der Berührlinien
0		0	0	0	0
	10	290.89	290.89	7.4637255	7.4637273
	20	581.77	581.78	7.7647537	7.7647610
	30	872.65	872.69	7.9408419	7.9408584
	40	1163.53	1163.61	8.0657763	8.0658057
	50	1454.39	1454.54	8.1626808	8.1627267
1		1745.24	1745.51	8.2418553	8.2419215
	10	2036.08	2036.50	8.3087941	8.3088842
	20	2326.90	2327.53	8.3667769	8.3668945
	30	2617.69	2618.59	8.4179190	8.4180679
	40	2908.47	2909.70	8.4636649	8.4638486
	50	3199.22	3200.86	8.5050447	8.5052671
2		3489.95	3492.08	8.5428192	8.5430838
	10	3780.65	3783.35	8.5775660	8.5778766
	20	4071.31	4074.69	8.6097341	8.6100943
	30	4361.94	4366.09	8.6396796	8.6400931
	40	4652.53	4657.57	8.6676893	8.6681598
	50	4943.08	4949.13	8.6939980	8.6945292
3		5233.60	5240.78	8.7188002	8.7193958
	10	5524.06	5532.51	8.7422586	8.7429222
	20	5814.48	5824.74	8.7645111	8.7652465
	30	6104.85	6116.26	8.7856753	8.7864861
	40	6395.17	6408.29	8.8058523	8.8067422
	50	6685.44	6700.43	8.8251299	8.8261026
4		6975.65	6992.68	8.8435845	8.8446437
	10	7265.80	7285.05	8.8618833	8.8624327
	20	7555.89	7577.55	8.8782854	8.8795286
	30	7845.91	7870.17	8.8946433	8.8959842
	40	8135.87	8162.93	8.9104039	8.9118460
	50	8425.76	8455.33	8.9256089	8.9271560
5		8715.57	8748.87	8.9402960	8.9419518
	10	9005.32	9043.06	8.9544991	8.9562672
	20	9294.99	9335.40	8,9682487	8.9701330
	30	9584.58	9628.90	8.9815729	8.9835769
	40	9874.08	9922.57	8.9944968	8.9966243
	50	10163.51	10216.41	9,0070436	9.0092984

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
89	60	100000.00	unendliche	10.0000000	unendliche
	50	99999.58	34377371.00	9.9999982	12.5362727
	40	99998.30	17188540.00	9.9999927	12.2352390
	30	99996.19	11458865.00	9.9999835	12.0591416
	20	99993.23	8593979.10	9.9999706	11.9341943
	10	99989.42	6875008.70	9.9999541	11.8372733
88	60	99984.77	5728996.16	9.9999338	11.7580785
	50	99979.27	4910388.06	9.9999100	11.6911158
	40	99972.92	4296407.73	9.9999824	11.6331055
	30	99965.73	3818845.93	9.9998512	11.5819321
	20	99957.69	3436777.09	9.9998162	11.5361514
	10	99948.81	3124157.67	9.9997776	11.4947329
87	60	99939.08	2863625.33	9.9997354	11.4569162
	50	99928.51	2643159 96	9.9996894	11.4221234
	40	99917.09	2454175.78	9.9996398	11.3899057
	30	99904.82	2290376.55	9.9995865	11.3599059
	20	99891.71	2147040.10	9.9995297	11.3318402
	10	99877.75	2020555.35	9.9994688	11.3054708
86	60	99862.95	1908113.67	9.9994044	11.2806042
	50	99847.31	1807497.74	9.9993364	11.2570778
	40	99830.81	1716933.69	9.9992646	11.2347535
	30	99813.48	1634985.55	9.9991892	11.2135139
	20	99795.29	1560478.41	9.9991101	11.1932578
	10	99776.27	1492441.70	9.9990272	11.1738074
85	60	99756.40	1430066 63	9.9999408	11.1553563
	50	99735.69	1372673.79	9.9988506	11.1375673
	40	99714.13	1319688.30	9.9987567	11.1204714
	30	99691.73	1270620.47	9.9986491	11.1040158
	20	99668.49	1225050.55	9.9985579	11.0881540
	10	99644.40	1182616.67	9.9984529	11.0728440
84	60	99619.47	1143005.23	9.9983442	11.0580482
	50	99593.69	1105943.10	9.9982318	11.0437328
	40	99567.08	1071191.26	9.9981158	11.0298670
	30	99539.62	1038539.71	99979960	11.0164231
	20	99511.32	1007803.11	99978725	11.0033757
	10	99482.17	978817.32	9.9977453	10.9907016

Grade	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
6		10452.85	10510.42	9.0192346	9.0216202
	10	10742.10	10804.62	9.0310890	9.0336093
	20	11031.26	11098.99	9.0426249	9.0452836
	30	11320.32	11393.56	9.0538588	9.0566595
	40	11609.29	11688.31	9.0648057	9.0677522
	50	11898.16	11983.28	9.0754799	9.0785760
7		12186.93	12278.46	9.0858945	9.0891438
	10	12475.60	12573.84	9.0960615	9.0994678
	20	12764.16	12869.43	9.1059924	9.1095594
	30	13052.62	13165.25	9.1156977	9.1194291
	40	13340.96	13461.29	9.1251872	9.1290868
	50	13629.19	13757.57	9.1344702	9.1385417
8		13917.31	14054.08	9.1435553	9.1478025
	10	14205.31	14350.84	9.1524507	9.1568773
	20	14493.19	14647.84	9.1611639	9.1657737
	30	14780.94	14945.10	9.1697021	9.1744983
	40	15068.57	15242.61	9.1780721	9.1830595
	50	15356.07	15540.40	9.1862802	9.1914621
9		15643.45	15838.44	9.1943324	9.1997125
	10	15930.69	16136.77	9.2022345	9.2078165
	20	16217.79	16435.37	9.2099917	9.2157795
	30	16504.76	16734.26	9.2176092	9.2236065
	40	16791.59	17033.44	9.2250918	9.2313024
	50	17078.28	17332.92	9.2324440	9.2388717
10		17364.82	17632.70	9.2396702	9.2463188
	10	17651.21	17932.78	9.2467746	9.2536477
	20	17937.46	18233.18	9.2537609	9.2608625
	30	18223.55	18533.90	9.2606330	9.2679669
	40	18509.49	18834.95	9.2673945	9.2749644
	50	18795.27	19136.32	9.2740487	9.2818585
11		19080.90	19438.03	9.2805988	9.2886523
	10	19366,36	19740.08	9.2870480	9.2953489
	20	19651,66	20042.48	9.2933993	9.3019514
	30	19936.79	20345,23	9.2996553	9.3084626
	40	20221.76	20648.34	9.3058189	9.3148851
	50	20506.55	20951.81	9.3118926	9.3212216

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
83	60	99452.18	951436.45	9.9976143	10.9783798
	50	99421.36	925530.35	9,9974797	10.9663907
	40	99389.69	900982.61	9.9973414	10.9547164
	30	99357.18	877688.74	9.9971993	10.9433405
	20	99323.83	855554.68	9.9970535	10.9322478
	10	99289.64	834495'57	9.9969040	10.9214240
82	60	99254.62	814434.64	9.9967507	10.9108562
	50	99218.74	795302.24	9.9965937	10.90[illegible]5322
	40	99182.03	777035.06	9.9964330	10.8904406
	30	99144.49	759575.41	9.9962686	10.8805709
	20	99106.09	742870.64	9.9961004	10.8709132
	10	99066.87	726872.55	9.9959284	10.8614583
81	60	99026.80	711536.97	9.9957528	10.8521975
	50	98985.90	696823.35	9.9955734	10.8431227
	40	98944.16	682694.37	9.9953902	10.8342263
	30	98901.58	669115,62	9.9952033	10.8255012
	20	98858.17	656055.38	9.9950126	10.8169405
	10	98813.92	643484.28	9.9948181	10.8085379
80	60	98768.83	631375.15	9.9946199	10.8002875
	50	98722.91	619702.79	9.9944180	10.7921835
	40	98676.15	608443.81	9.9942122	10.7842205
	30	98628.56	597576.44	9.9940027	10.7763935
	20	98580,13	587080.42	9.9937894	10.7686976
	10	98530.87	576936.88	9.9935723	10.7611283
79	60	98480.77	567128.18	9.9933515	10.7536812
	50	98429.85	557637.86	9.9931268	10.7463523
	40	98378.08	548450.52	9.9928984	10.7391375
	30	98325.49	539551.72	9.9926661	10.7320331
	20	98272.06	530927.93	9.9924301	10.7250356
	10	98217.81	522566.47	9.9921902	10.7181415
78	60	98162.71	514455.40	9.9919466	10.7113477
	50	98106,80	506583.52	9.9916991	10.7046511
	40	98050.05	498940.27	9.9914478	10.6980486
	30	97992.47	491515.70	9.9911927	10.6915374
	20	97934.06	484300.45	9.9909338	10.6851149
	10	97874.83	477285.67	9.9906710	10.6787784

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
12		20791.17	21255.65	9.3178789	9.3274745
	10	21075.61	21559.88	9.3237802	9.3336463
	20	21359.88	21864.48	9.3295988	9.3397391
	30	21643.96	22169.47	9.3353368	9.3457552
	40	21927.86	22474.85	9.3409963	9.3516968
	50	22211.58	22780.63	9.3465794	9.3575658
13		22495.11	23086.82	9.3520880	9.3633641
	10	22778.44	23393.42	9.3575240	9.3690937
	20	23061.59	23700.44	9.3628892	9.3747563
	30	23344.54	24007.87	9.3681853	9.3803537
	40	23627.29	24315.75	9.3734139	9.3858876
	50	23909.84	24624.05	9.3785767	9.3913595
14		24192.19	24932.80	9.3836752	9.3967711
	10	24474.33	25242.00	9.3887109	9.4021237
	20	24756.27	25551.65	9.3936852	9.4074189
	30	25038.00	25861.76	9.3985996	9.4126581
	40	25319.52	26172.34	9.4034554	9.4178425
	50	25600.82	26483.39	9.4082539	9.4229735
15		25881.90	26794.92	9.4129962	9.4280525
	10	26162.77	27106,93	9.4176837	9.4330804
	20	26443.42	27419.44	9.4223176	9.4380587
	30	26723.84	27732.45	9.4268988	9.4429883
	40	27004.03	28045.97	9.4314286	9.4478704
	50	27284.00	28359.99	9,4359080	9.4527061
16		27563.74	28674.54	9.4403381	9.4574964
	10	27843.24	28989.61	9.4447197	9.4622423
	20	28122.51	29305.21	9.4490540	9.4669448
	30	28401.53	29621.35	9.4533418	9.4716048
	40	28680.32	29938.03	9.4575840	9.4762233
	50	28958.87	30255.27	9.4617816	9.4808011
17		29237.17	30573.07	9.4659353	9.4853390
	10	29515.22	30891.43	9.4700461	9.4898380
	20	29793.03	31210.36	9.4741146	9.4942988
	30	30070.58	31529.88	9.4781418	9.4987223
	40	30347.88	31849,98	9.4821283	9.5031092
	50	30624.92	32170.67	9.4860749	9.5074602

Grad.	Minut.	Schoßlinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoßlinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
77	60	97814.76	470463.01	9.9904044	10.6725255
	50	97753.86	463824.57	9.9901339	10.6663553
	40	97692,15	457362.87	9.9898597	10.6602609
	30	97629.60	451070.85	9.9895815	10.6542448
	20	97566.23	444941.81	9.9892995	10.6483032
	10	97502.03	438969.40	9.9890137	10.6424342
76	60	97437.01	433147.59	9.9887239	10.6366359
	50	97371.16	427470.66	9.9884303	10.6309063
	40	97304.48	421933.18	9.9881329	10.6252437
	30	97236.99	416529.98	9.9878315	10.6196463
	20	97168.67	411256.14	9.9875263	10.6141124
	10	97099.54	406107.00	9.9872171	10.6086405
75	60	97029.57	401078.09	9.9869041	10.6032289
	50	96958.79	396165.18	9.9865872	10.5978763
	40	96887.18	391364.20	9.9862663	10.5925811
	30	96814.76	386671.31	9.9859416	10.5873419
	20	96741.52	382082.81	9.9856129	10.5821575
	10	96667.46	377595.19	9.9852803	10.5770265
74	60	96592.58	373205.08	9.9849438	10.5719475
	50	96516.88	368909.27	9.9846033	10.5669196
	40	96440.37	364704.67	9.9842589	10.5619417
	30	96363.05	360588.35	9.9839105	10.5570113
	20	96284.90	356557.49	9.9835582	10.5521296
	10	96205.94	352609.38	9.9832019	10.5472939
73	60	96126.17	348741.44	9.9828416	10.5425036
	50	96045,58	344951.20	9.9824774	10.5377577
	40	95964.18	341236.26	9.9821092	10.5330552
	30	95881.97	337594.34	9.9817370	10.5283952
	20	95798.95	334023.26	9.9813608	10.5237767
	10	95715.12	330520.91	9.9809805	10.5191989
72	60	95630.48	327085.26	9.9805963	10.5146610
	50	95545.02	323714.38	9.9802081	10.5101620
	40	95458.76	320406.38	9.9798158	10.5057012
	30	95371.69	317159.48	9.9794195	10.5012777
	20	95283.82	313971.94	9.9790192	10.4968908
	10	95195.14	310842.10	9.9786148	10.4925398

Grad.	Minut.	Schoßlinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoßlinien	Verhältnißzahl der Berührlinien
18		30901.70	32491.97	9.4899824	9.5117760
	10	31178.22	32813.87	9.4938513	9.5160575
	20	31454.48	33136.39	9,4976824	9.5203052
	30	31730.47	33459.53	9.5014764	9.5245199
	40	32006.19	33783.30	9.5052339	9.5287021
	50	32281.64	34107.71	9.5089556	9.5328526
19		32556.82	34432.76	9,5126419	9.5369719
	10	32831.72	34758.46	9.5162936	9.5410606
	20	33106.34	35084.83	9.5199112	9.5451193
	30	33380.69	35411.86	9,5234953	9.5491487
	40	33654.75	35739.56	9.5270463	9.5531492
	50	33928.53	36067.95	9.5305650	9.5571214
20		34202.02	36397.02	9.5340517	9.5610659
	10	34475.22	36726.80	9.5375069	9.5649831
	20	34748.13	37057.28	9.5409314	9.5688735
	30	35020.74	37388.47	9.5443253	9.7527377
	40	35293.06	37720.38	9.5476893	9.5765761
	50	35565.08	38053.03	9.5510237	9.5803892
21		35836.79	38386.40	9.5543292	9.5841774
	10	36108.21	38720.53	9.5576060	9.5879413
	20	36379.32	39055.41	9.5608546	9.5916812
	30	36650.13	39391.05	9.5640754	9.5953975
	40	36920.62	39727.46	9.5672689	9.5990908
	50	37190.80	40064,65	9.5704355	9.6027613
22		37460.66	40402.62	9.5735754	9.6064096
	10	37730.21	40741.39	9,5766892	9.6100359
	20	37999.44	41080.97	9.5797772	9.6136407
	30	38268.34	41421.36	9.5828397	9.6172243
	40	38536.93	41762.57	9.5858771	9,6207872
	50	38805.18	42104.60	9.5888897	9.6243296
23		39073.11	42447.49	9.5918780	9.6278519
	10	39340.71	42791.20	9.5948422	9.6313545
	20	39607.98	43135.79	9.5977827	9.6348378
	30	39874.91	43481.24	9.6006997	9.6383019
	40	40141,50	43827.56	9.6035936	9.6417473
	50	40407.75	44174.76	9.6064647	9.6451743

Grad.	Minut.	Schoßlinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoßlinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
71	60	95105.65	307768.35	9.9782063	10,4882240
	50	95015.36	304749.15	9.97779.38	10.4839425
	40	94924.26	301783.01	9.9773772	10.4796948
	30	94832.36	298868.50	9.9769566	10.4754801
	20	94739,66	296004.22	9.9765318	10.4712979
	10	94646.16	293188.85	9.9761030	10.4671474
70	60	94551.85	290421.09	9.9756701	10.4630281
	50	94456,75	287699.70	9.9752330	10.4589394
	40	94360.85	285023.49	9.9747918	10. 4548807
	30	94264.15	282391:29	9.9743466	10.4508513
	20	94166.65	279801.98	9.9738971	10.4468508
	10	9.406835	277254,48	9.9734435	10.4428786
69	60	93969.26	274747.74	9.9729858	10.4389341
	50	93869.37	272280.75	9.9725239	10.4350169
	40	93768.69	269852.54	9.9720579	10.4311265
	30	93667.22	267462:15	9.9715876	10.4272623
	20	93564.95	265108.67	9.9711132	10.4234239
	10	93461.89	262791.21	9.9706346	10.4196108
68	60	93358.04	260508.91	9.9701517	10.4158226
	50	93253.40	258260.94	9.9696647	10.4120587
	40	93147.97	256046.49	9.9691734	10.4083188
	30	93041.75	253864.79	9.9686779	10.4046025
	20	92934.75	251715,07	9.9681781	10.4009092
	10	92826.96	249596.61	9.9676741	10.3972387
67	60	92718.39	247508.69	9.9671659	10.3935904
	50	92609.03	245450.61	9.9666533	10.3899641
	40	92498.88	243421.72	6.9661365	10..3863593
	30	92387.95	241421.36	9.9656153	10.3827757
	20	92276.24	239448.89	9.9650899	10.3792128
	10	92163.75	237503.72	9.9645602	10.3756704
66	60	92050.49	235585.24	9.9640261	10.3721481
	50	91936.44	233692.87	9.9634877	10,3686455
	40	91821.61	231826.06	9.9629449	10.3651622
	30	91706.01	229984.25	9.9623978	10.3616981
	20	91589.63	228166.93	9.9618463	10.3582527
	10	91472.47	226373.57	9.9612904	10.3548257

Grad.	Minut.	Schoßlinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoßlinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
24		40673.66	44522.87	9.6093133	9.6485831
	10	40939.23	44871.87	9.6121397	9.6519742
	20	41204.46	45221.79	9.6149441	9.6553477
	30	41469.32	45572.64	9.6177270	9.6587041
	40	41733.85	45924.39	9.6204884	9.6620434
	50	41998.01	46277.09	9.6232287	9.6653662
25		42261.83	46630.77	9.6259483	9.6686725
	10	42525.28	46985,39	9.6286472	9.6719628
	20	42788.38	47340.98	9.9313258	9.6752372
	30	43051.11	47697.55	9.6339844	9.6784961
	40	43313.48	48055.12	9.6366231	9.6817396
	50	43575.48	48413.68	9.6392422	9.6849681
26		43837.12	48773.26	9.6418420	9.6881818
	10	44098.38	49133.86	9.6444226	9.6913809
	20	44359.27	49495.49	9.6469844	9.6945656
	30	44619.78	49858.16	9.6495274	9.6977363
	40	44879.92	50221.89	9.6520521	9.7008930
	50	45139.68	50586.68	9.6545584	9.7040362
27		45399.05	50952.54	9.6570468	9.7071659
	10	45658.04	51319.50	9.6595173	9.7102824
	20	45916.64	51687.55	9.6619701	9.7133859
	30	46174.86	52056.70	9.6644056	9.7164767
	40	46432.69	52426.98	9.6668238	9.7195549
	50	46690.12	52798.39	9,6692250	9.7226207
28		46947.16	53170.94	9.6716093	9.7256744
	10	47203.80	53544.65	9.6739769	9.7287161
	20	47460.04	53919.52	9.6763281	9.7317460
	30	47715.88	54295.57	9.6786629	9.7347644
	40	47971.31	54672.81	9.6809816	9.7377714
	50	48226.34	55051.25	9.6832843	9.7407672
29		48480.96	55430.90	9.6855712	9.7437520
	10	48735.17	55811.79	9.6878425	9.7467259
	20	48988,97	56193.91	9.6900983	9.7496892
	30	49242.36	56577.28	9.6923388	9.7526420
	40	49495.33	56961.91	9.6845642	9.7555846
	50	49747.87	57347.83	9.6967745	9.7585170

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
65	60	91354.54	224603.68	9.9607302	10.3514169
	50	91235.84	222856.76	9.9601655	10.3480258
	40	91116.37	221132.34	9.9595964	10.3446523
	30	90996.13	219429.97	9.9590229	10.3412960
	20	90875.11	217749.20	9.9584450	10.3379566
	10	90753.33	216089.58	9.9578626	10.3346338
64	60	90630.78	214450.69	9.9572757	10.3313275
	50	90507.46	212832.13	9.9566844	10.3280372
	40	90383.38	211233.48	9.9560886	10.3247628
	30	90258.53	209654.36	9.9554882	10.3215039
	20	90132.91	208094.38	9.9548834	10.3182604
	10	90006.54	206553.18	9.9542741	10.3150319
63	60	89879.40	205030.38	9.9536602	10.3118182
	50	89751.51	203525.65	9.9530418	10.3086191
	40	89622.85	202038.62	9.9524188	10.3054344
	30	89493.43	200568.97	9.9517912	10.3022637
	20	89363.27	199116.37	9.9511590	10.2991070
	10	89232.33	197680.50	9.9505223	10.2959638
62	60	89100.65	196261.05	9.9498809	10.2928341
	50	88968.21	194857.71	9.9492349	10.2897176
	40	88835.02	193470.20	9.9485842	10.2866141
	30	88701.08	192098.21	9.9479289	10.2835233
	20	88566.39	190741.47	9.9472689	10.2804451
	10	88430.95	189399.71	9.9466043	10.2773793
61	60	88294.76	188072.65	9.9459349	10.2743256
	50	88157.82	186760.03	9.9452609	10 2712839
	40	88020.14	185461.59	9.9445821	10.2682540
	30	87881.71	184177.09	9.9438985	10.2652356
	20	87742.54	182906.28	9.9432102	10.2622286
	10	87602.62	181648.92	9.9425171	10.2692328
60	60	87461.97	180404.78	9.9418193	10 2562480
	50	87320.58	179173.62	9.9411166	10.2532741
	40	87178.44	177955.24	9.9404091	10.2503108
	30	87035.57	176749.70	9.9396968	10.2473580
	20	86891.96	175555.90	9.9389796	10.2444154
	10	86747.62	174374.53	9.9382576	10.2414830

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinien
30		50000.00	57735.03	9.6989700	9,7614394
	10	50251.70	58123.53	9.7011508	9.7643520
	20	50502.99	58513.35	9.7033170	9.7672550
	30	50753.84	58904.50	9.7054689	9.7701485
	40	51004.26	59296.99	9.7076064	9.7730327
	50	51254.25	59690.84	9.7097299	9.7759077
31		51503.81	60086.06	9.7118393	9.7787737
	10	51752.93	60482.66	9.7139349	9.7816309
	20	52001.61	60880.67	9.7160168	9.7844794
	30	52249.86	61280.08	9.7180851	9,7873193
	40	52497.66	61680.92	9.7201399	9.7901508
	50	52745.02	62083.20	9.7221814	9.7929741
32		52991.93	62486.94	9.7242097	9.7957892
	10	53238.39	62892.15	9.7262249	9.7985964
	20	53484.40	63298.83	9.7282271	9.8013957
	30	53729.96	63707.03	9.7302165	9.8041873
	40	53975.07	64116.73	9.7321932	9.8069714
	50	54219.71	64527.97	9.7341572	9.8097480
33		54463.90	64940.76	9.7361088	9.8125174
	10	54707.63	65355.11	9.7380479	9.8152795
	20	54950.90	65771.03	9.7399748	9.8180347
	30	55193.70	66188.56	9.7418895	9.8207829
	40	55436.03	66607.69	9.7437921	9.8235244
	50	55677.90	67028.45	9.7456828	9.8262592
34		55919.29	67450.85	9,7475617	9,8289874
	10	56160.21	67874.92	9.7494287	9.8317093
	20	56400.65	68300.66	9.7512842	9.8344249
	30	56640.62	68728.10	9.7531280	9.8371343
	40	56880.11	69157.24	9.7549604	9.8398377
	50	57119.12	69588.13	9.7567815	9.8425351
35		57357.64	70020.75	9.7585913	9.8452268
	10	57595,68	70455.15	9.7603899	9.8479127
	20	57833.23	70891.33	9.7621775	9.8505931
	30	58070.30	71329.31	9.7639540	9.8532680
	40	58306.87	71769.11	9.7657197	9.8559376
	50	58542.94	72210.75	9.7674746	9.8586019

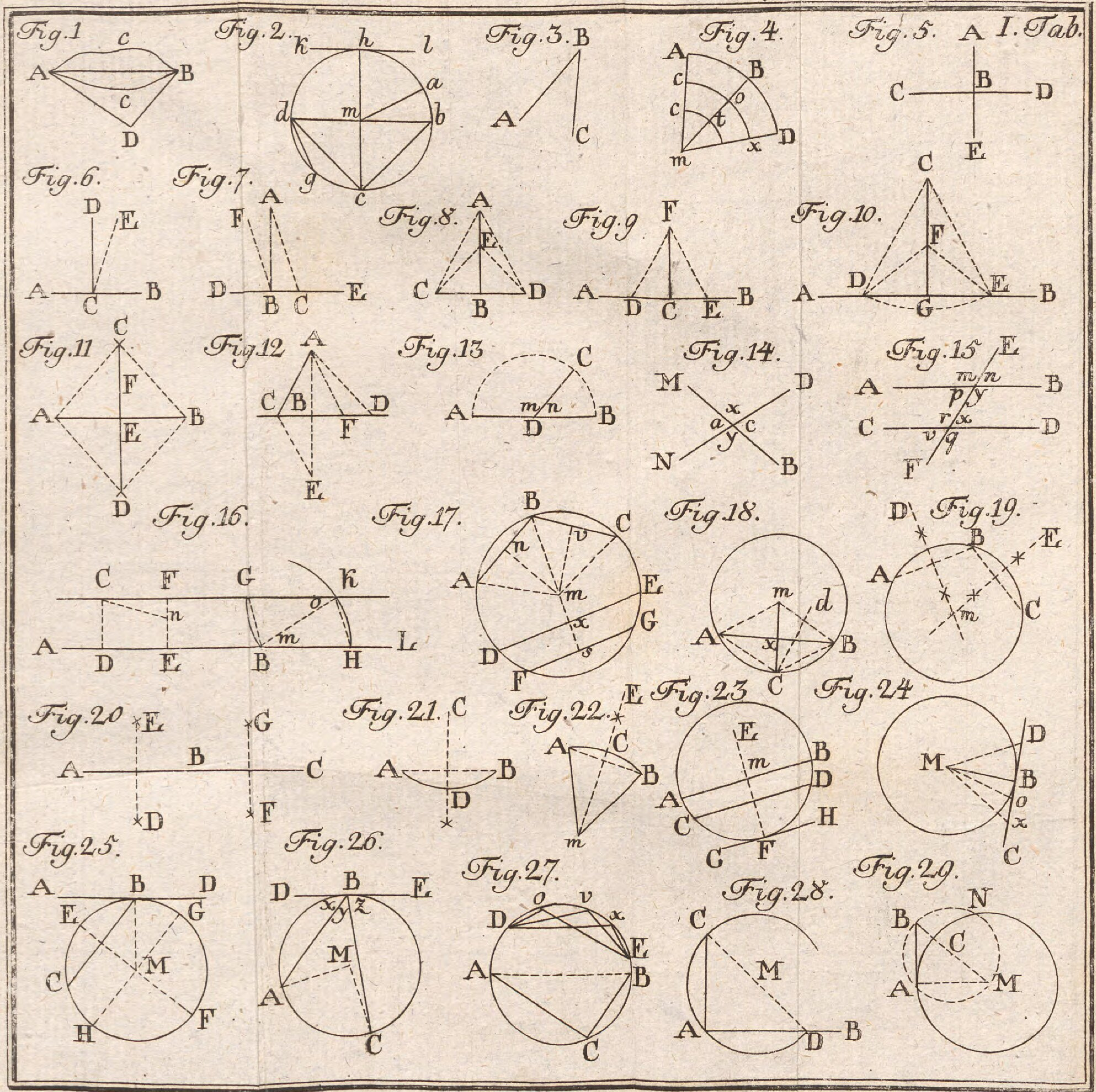
Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
59	60	86602.54	173205.08	9.9375306	10.2385606
	50	86456.73	172047.36	9.9367988	10.2356480
	40	86310.19	170901·16	9.9360621	10.2327450
	30	86162.92	169766.31	9.9353204	10.2298515
	20	86014.91	168642.61	9.9345738	10.2269673
	10	85866.18	167529.88	9.9338222	10.2240923
58	60	85716.73	166427.95	9.9330656	10.2212263
	50	85566:55	165336.63	9.9323040	10.2183691
	40	85415.64	164255.76	9.9315374	10.2155206
	30	85264.02	163185.17	9.9307658	10.2126807
	20	85111.66	162124.69	9.9299891	10.2098492
	10	84958.60	161074.17	9.9292073	10.2070259
57	60	84804.81	160033.45	9.9284205	10.2042108
	50	84650.30	159002.38	9.9276285	10.2014036
	40	84495.08	157980.79	9.9268314	10.1983248
	30	84339.14	156968.56	9.9260292	10.1958127
	20	84182.49	155965.52	9.9252218	10.1930286
	10	84025.13	154971,55	9.9244092	10.1902520
56	60	83867.06	153986.50	9.9235914	10.1874826
	50	83708.27	153010.23	9.9227684	10.1847205
	40	83548.78	152042.61	9.9219401	10.1819653
	30	83388.58	151083.52	9.9211066	10.1792171
	20	83227.68	150132.82	9.9202678	10.1764756
	10	83066.07	149190.38	9.9194237	10.1737408
55	60	82903.76	148256.10	9.9185742	10.1710126
	50	82740.74	147329.83	9.9177194	10.1682907
	40	82577.03	146411.47	9.9168593	10.1655751
	30	82412.62	145500.90	9.9159937	10,1628657
	20	82247.51	144598.01	9,9151228	10.1601623
	10	82081.70	143702.68	9.9142464	10.1574649
54	60	81915.21	142814.80	9.9133645	10.1547732
	50	81748.01	141934·27	9.9124772	10.1520873
	40	81580,13	141060·98	9.9115844	10.1494069
	30	81411.55	140194·83	9.9106860	10.1467320
	20	81242,29	139335·71	9.9097821	10.1440624
	10	81072.33	138483,53	9.9088727	10.1413681

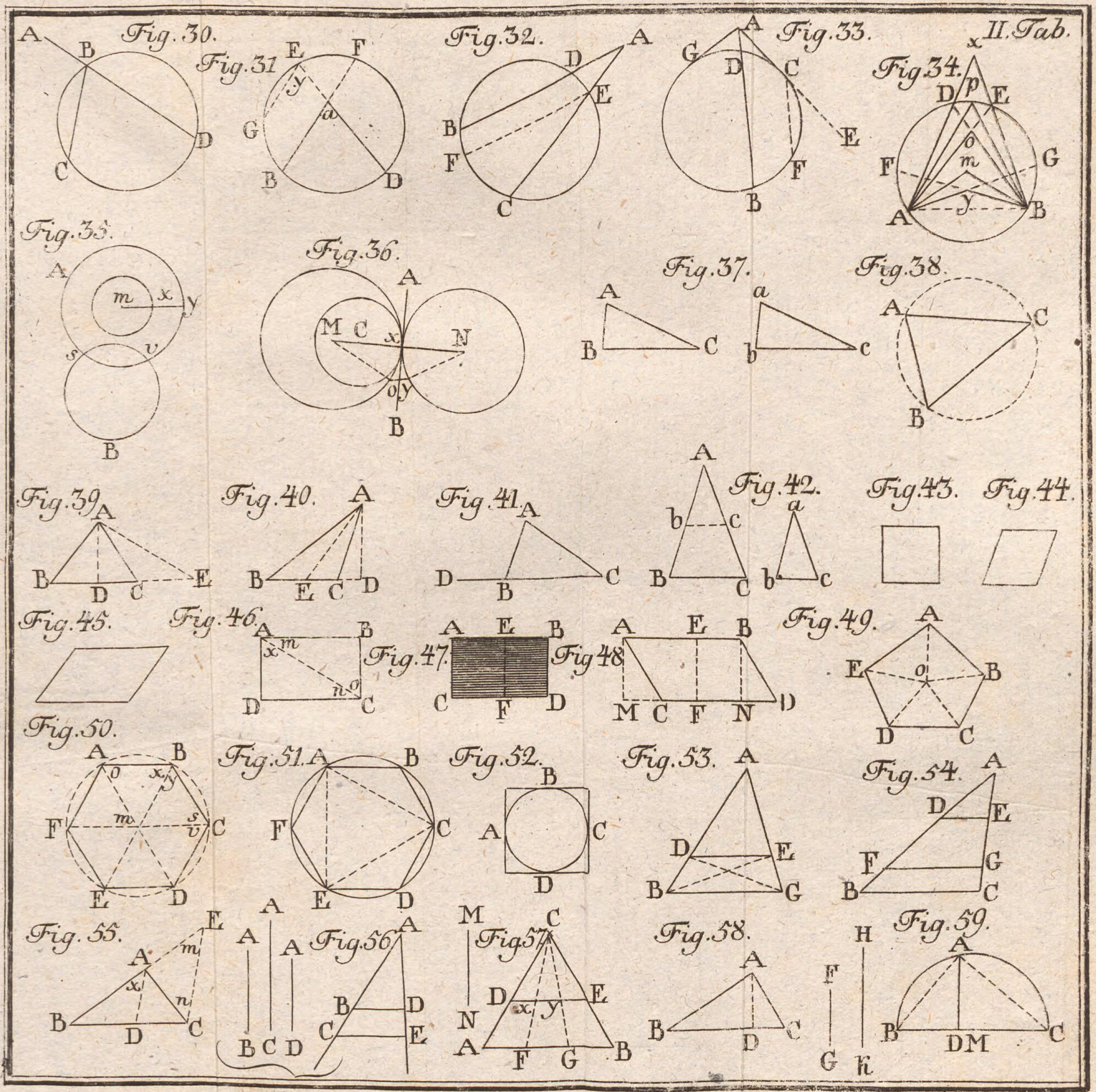
Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
36		58778.53	72654,26	9.7692187	9.8612610
	10	59013.61	73099.63	9.7709522	9.8639152
	20	59248.19	73546.91	9.7726751	9.8665644
	30	59482.28	73996.11	9.7743876	9.8692089
	40	59715.86	74447.24	9.7760897	9.8718486
	50	59948.93	74900.33	9.7777815	9.8744838
37		60181,50	75355.40	9.7794630	9.8771144
	10	60413.56	75812.48	9.7811344	9.8797407
	20	60645.11	76271.57	9.7827958	9.8823627
	30	60876.14	76732.70	9.7844471	9.8849805
	40	61106.66	77195.89	9.7860886	9.8875942
	50	61336.66	77661.17	9.7877202	9.8902040
38		61566.15	78128.56	9.7893420	9.8928098
	10	61795.11	78598.08	9.7909541	9.8954119
	20	62023.55	79069.75	9.7925566	9.8980104
	30	62251.46	79543.59	9.7941496	9.9006052
	40	62478.85	80019.63	9.7957330	9.9031966
	50	62705.71	80497.90	9.7973071	9.9057845
39		62932.04	80978.40	9.7988718	9.9083692
	10	63157.84	81461.18	9.8004272	9.9109507
	20	63383.09	81946.25	9.8019735	9.9135291
	30	63607.82	82433.64	9.8035105	9.9161045
	40	63832.01	82923.37	9.8050385	9.9186769
	50	64055.66	83415.47	·98065575	9.9212466
40		64278.76	83909.96	9.8080675	9.9238135
	10	64501.32	84406.88	9.8095686	9.9263778
	20	64723.34	84906.24	9.8110609	9.9289396
	30	64944.80	85408.07	9.8125444	9.9314989
	40	65165.72	85912.40	9.8140192	9.9340559
	50	65386.09	86419.26	9.8154854	9.9366105
41		65605.90	86928.68	9.8169429	9.9391631
	10	65825.16	87440.67	9.8183919	9.9417135
	20	66043.86	87955.28	9.8198325	9.9442619
	30	66262.01	88472.53	9.8212646	9.9468084
	40	66479.59	88992.45	9.8226883	9,9493531
	50	66696.61	89515.06	9.8241037	9.9518961

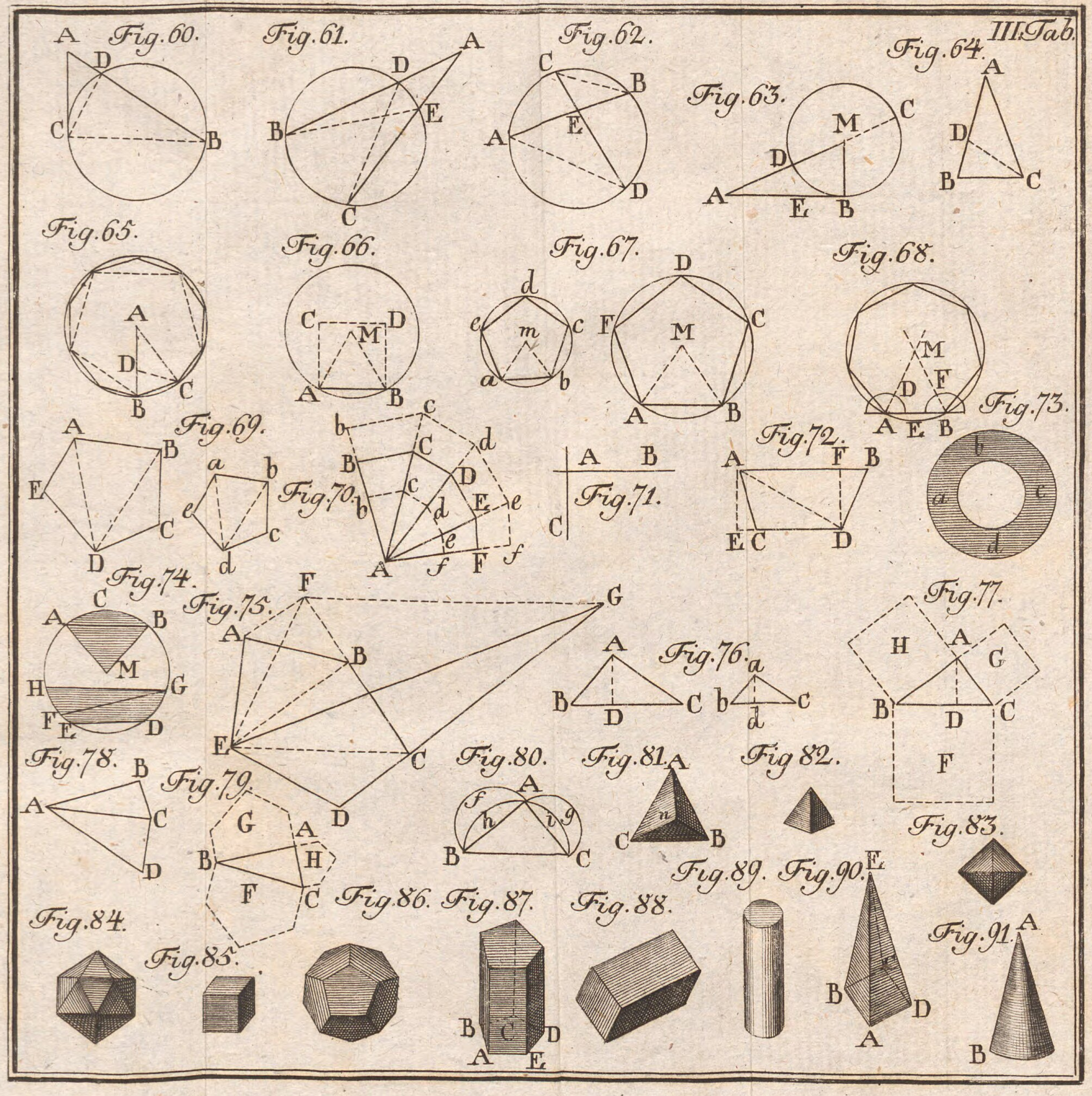
Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
53	60	80901.70	137638.19	9.9079576	10.1387390
	50	80730.38	136799.59	9.9070379	10.1360848
	40	80558.37	135967.64	9.9061107	10.1334356
	30	80385.69	135142.24	9.9051787	10.1307911
	20	80212.32	134323.31	9.9042411	10.1281514
	10	80038.27	133510.75	9.9032977	10.1255162
52	60	79863.55	132704.48	9.9023486	10.1228856
	50	79688.15	131904.41	9,9013938	10.1202593
	40	79512.08	131110.46	9.9004331	10.1176373
	30	79335.33	130322.54	9.8994667	10.1150195
	20	79157.92	129540.57	9.8984944	10.1124058
	10	78979.83	128764.47	9.8975162	10.1097960
51	60	78801,07	127994.16	9.8965321	10.1071902
	50	78621.65	127229.57	9.8955422	10.1045881
	40	78441.57	126470.62	9.8945463	10.1019896
	30	78260.82	125717.23	9.8935444	10.0993948
	20	78079.40	124969.33	9.8925365	10.0968034
	10	77897.33	124226.85	9.8915226	10.0942155
50	60	77714.60	123489.72	9.8905026	10.0916308
	50	77531.21	122757.86	9.8894765	10.0890493
	40	77347.16	122031.21	9.8884444	10.0864709
	30	77162.46	121309.70	9.8874061	10.0838955
	20	76977.10	120593.27	9.8863616	10.0813231
	10	76791.10	119881,84	9.8853109	10.0787534
49	60	76604.44	119175.36	9.8842540	10.0761865
	50	76417.14	118473.76	9.8831908	10.0736222
	40	76229.19	117776.98	9.8821213	10.0710604
	30	76040.60	117084.96	9.8810455	10.0685011
	20	75851.36	116397.63	9.8799634	10.0659441
	10	75661.47	115714.95	9.8788748	10.0633895
48	60	75470.96	115636.84	9.8777799	10.0608369
	50	75279.80	114363.26	9:8766785	10.0582865
	40	75088.00	113694.14	9.8755706	10.0557381
	30	74895.57	113029.44	9.8744561	10.0531916
	20	74702.51	112369.09	9.8733352	10.0506469
	10	74508.81	111713.05	9.8722076	10.0481039

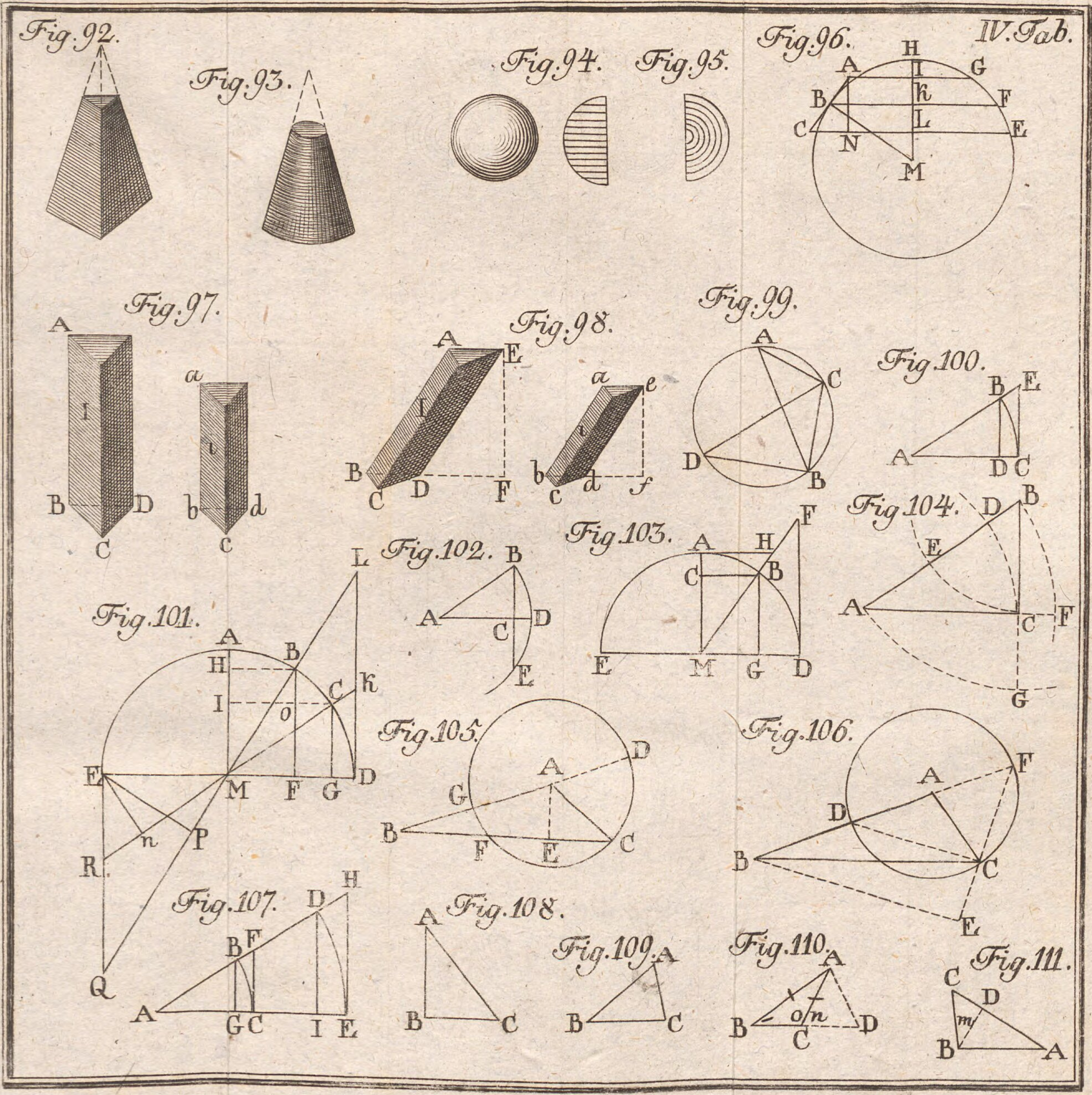
Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
42		66913,06	90040.41	9.8255109	9.9544374
	10	67128.95	90568.51	9.8269098	9.9569772
	20	67344.27	91099:41	9.8283006	9.9595155
	30	67559.02	91633.12	9.8296833	9.9620525
	40	67773.20	92169.68	9.8310580	9.9645881
	50	67986.81	92709.14	9.8324246	9.9671225
43		68199.84	93251.51	9.8337833	9.9696559
	10	68412.29	93796.83	9.8351341	9.9721882
	20	68624.16	94345.13	9.8364771	9.9747195
	30	68835.45	94896.46	9.8378122	9.9772500
	40	69046 17	95450.83	9.8391396	9.9797797
	50	69256.30	96008.29	9.8404593	9.9823087
44		69465.84	96568.88	9.8417713	9.9848372
	10	69674.79	97132.62	9.8430757	9.9873651
	20	69883.15	97699.56	9.8443725	9.9898926
	30	70090.93	98269.73	9.8456618	9.9924197
	40	70298.10	98843.16	9.8469436	9.9949466
	50	70504.69	99419.91	9.8482180	9.9974734
45		70710.68	100000.00	9.8494850	10.0000000

Grad.	Minut.	Schoslinie	Berührlinie	Verhältnißzahl der Schoslinie	Verhältnißzahl der Berührlinie
47	60	74314.48	111061.25	9.8710735	10.0455626
	50	74119.53	110413.65	9.8699326	10.0430228
	40	73923.94	109770.20	9.8687851	10.0404845
	30	73727.73	109130.85	9.8676309	10.0379475
	20	73530.90	108495.54	9.8664699	10.0354119
	10	73333.45	107864.23	9.8653021	10.0328775
46	60	73135.37	107236.87	9.8641275	10.0303441
	50	72936.67	106613.41	9.8629466	10.0278118
	40	72737.36	105993.81	9.8617576	10.0252805
	30	72537.44	105378.01	9.8605622	10.0227500
	20	72336.90	104765.98	9.8593599	10.0202203
	10	72135.74	104157.67	9.8581505	10.0176913
45	60	71933.98	103553.03	9.8569341	10.0151628
	50	71731.61	102952.03	9.8557106	10.0126349
	40	71528.63	102354.61	9.8544799	10.0101074
	30	71325.05	101760.74	9.8532421	10.0075803
	20	71120.86	101170.37	9.8519970	10.0050534
	10	70916.07	100583.47	9.8507446	10.0025266
44	60	70710.68	100000.00	9.8494850	10.0000000


I. Tab.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.


II. Tab.
Fig. 30.
Fig. 31
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.


III. Tab.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.


IV. Tab.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hadaly, Károly

Anfangsgründe der Mathematik

Bd.: 2

Preßburg 1790

Math.u. 65-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625395-8